مقدمة في التحليل الحقيقي

أ.د. إبراهيم بن صالح العليان
قسم الرياضيات
جامعة الملك سعود

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين، نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

نشأت فكرة تأليف هذا الكتاب أثناء قيامي بتدريس مقرر التحليل الحقيقي لطلاب قسم الرياضيات في جامعة الملك سعود لعدة فصول دراسية. ومن خلال الشرح والتفصيل في البراهين تبين أن الرسم يسهل فهم البرهان بشكل أسرع، لذلك حرصت أن يجمع الكتاب بين المعلومات العلمية، وجودة الإخراج، وسهولة الشرح مع طرح العديد من الأمثلة لاستيعاب المفاهيم الجديدة.

ظهر علم التفاضل على يد نيوتن وليبنز في نهايات القرن السابع عشر الميلادي، ولكن التحليل الحقيقي بدأ في وقت متأخر على يد كوشي وبولزانو ووايرشتراس في القرن التاسع عشر.

في التحليل الحقيقي ندرس موضوعات مشابهة للموضوعات التي تم التطرق لها في التفاضل والتكامل مع اختلاف طريقة المعالجة. في التفاضل والتكامل كان التركيز على الحسابات والتطبيقات (مثل إيجاد النهاية أو حساب المشتقة، إو إيجاد التكامل)، بينما يركز التحليل الحقيقي على دراسة الأعداد الحقيقية والمتتاليات والدوال بشكل أكثر صرامة رياضية، مع التركيز على المفاهيم أكثر من الإجراءات، إضافة لتنمية القدرة على البرهان.

في هذا الكتاب نركز على موضوعات المتتاليات والاتصال والاشتقاق. ونقدم البراهين بشكل مفصل مع استخدام الرسم عند الحاجة حتى يكون الكتاب تعليميا، أكثر من كونه مجرد مرجع.

في الباب الأول نقدم مبادئ أساسية في المجموعات والدوال التي سوف نستخدمها في الكتاب ثم نوضح طرق البرهان والتي نعتمد عليها بشكل كبير في الأبواب التالية، ويمكن للطالب الذي سبق أن درس هذه الموضوعات أن يكتفي بمراجعة سريعة لهذا الباب.

في الباب الثاني نقدم خصائص نظام الأعداد الحقيقية، ومن أبرز هذه الخصائص خاصية مسلمة التمام. ثم نتطرق للمجموعات القابلة للعد ونثبت أن الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

في الباب الثالث نعالج المتتاليات في الأعداد الحقيقية، ونتعرف على مفهوم نهايات المتتاليات. ثم نتطرق للمتتاليات الجزئية، ونناقش مبرهنة بولزانو فايرشتراس للمتتاليات، ونختم هذا الباب بالحديث عن متتالية كوشي.

في الباب الرابع، نتطرق لبعض المفاهيم التوبولجية البسيطة في الأعداد الحقيقية، مثل نقاط التراكم والمجموعات المفتوحة والمغلقة، والمجموعات المتراصة.

يعتبر البابان الخامس والسادس عن النهايات والاتصال من أهم الأبواب في هذا الكتاب. حيث نستفيد من المتتاليات في إثبات العديد من المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال. كما نركز في الاتصال على خصائص الدوال المتصلة على فترة. ثم نتعرف على الاتصال المنتظم وخصائص الدوال المتصلة بانتظام.

أما الباب السابع والأخير فنتطرق فيه للاشتقاق وبعض التطبيقات المهمة على الاشتقاق مثل مبرهنة القيمة المتوسطة وقاعدة لوبيتال ومبرهنة تيلور.

يحتوي الكتاب على العديد من المسائل المحلولة والتمارين في نهاية كل فصل، ويوجد شرح كامل لمحتوى الكتاب في قناة اليوتيوب https://youtube.com/playlist?list=PLoRgr6QHv33tM3VeBZRu8OVFoqAeSwm0n
وفي الختام، آمل أن أكون قد وفقت في تقديم نبذة عن التحليل الحقيقي، وأن يجد الكتاب الاستحسان والقبول لدى القارئ.
كما أرحب بالآراء والنقد فيما يتعلق بالكتاب، وأتقدم بالشكر لكل من يبدي ملاحظاته على الإيميل ialolyan@ksu.edu.sa

المؤلف

المحتويات

1 مفاهيم أساسية 7

1.1 المجموعات 7

1.2 الدوال 9

1.3 المنطق الرياضي وطرائق البرهان 11

2 الأعداد الحقيقية 17

2.1 الأعداد الطبيعية والاستقراء الرياضي 17

2.2 الحقول المرتبة 18

2.3 مسلمة التمام 21

2.4 المجموعات القابلة للعد 28

3 المتتاليات 33

3.1 المتتاليات المتقاربة 33

3.2 العمليات على المتتاليات 40

3.3 المتتاليات المطردة 49

3.4 المتتاليات الجزئية ونظرية بولزانو-فايرشتراس 57

3.5 متتالية كوشي 62

الباب الأول

مفاهيم أساسية

في هذا الباب نتطرق لبعض المفاهيم الأساسية التي نحتاجها في دراسة التحليل الحقيقي، بداية بالمجموعات، ثم الدوال، ثم نختم هذا الباب بالحديث عن المنطق وطرائق البرهان.

1.1 المجموعات

تعتبر المجموعة (set) من أهم المفاهيم التي تُبنى منها بقية المفاهيم الرياضية، وتعتبر مفهوما أوليا لا يمكن تعريفه. وكان العالم الألماني جورج كانتور أول من استخدم نظرية المجموعات في القرن التاسع عشر الميلادي. تدل المجموعة على أي تجمع من الأشياء وسوف يكون تركيزنا في هذا الكتاب على المجموعات المكونة من أعداد.

إذا كانت A مجموعة وكان a عنصرا في هذه المجموعة، فإننا نقول إن a ينتمي إلى A ونكتب

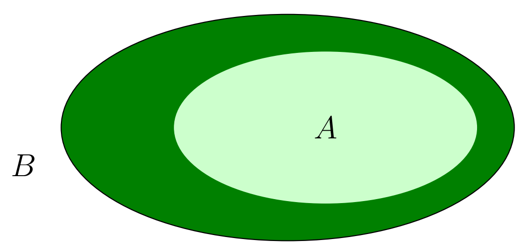
$$a \in A$$

أما إذا لم يكن a عنصرا في A، فإننا نكتب

$$a \notin A$$

إذا كانت A و B مجموعتين بحيث أنه لكل عنصر $x \in A$، فإن $x \in B$، فإننا نقول إن A محتواة في B، أو A مجموعة جزئية من B، ونكتب

$$A \subset B$$



وتكون المجموعتان A و B متساويتين إذا كان لهما نفس العناصر، ويمكن إثبات أن مجموعتين متساويتان إذا أثبتنا أن $A \subset B$ و $B \subset A$.

يمكن تعريف المجموعة عن طريق سرد عناصرها مثل

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

أو عن طريق الصفة المميزة التي تميز عناصرها مثل

$$B = \{x : x^2 = 4\}$$

وهذه المجموعة تتكون من عنصرين $\{-2, 2\}$.

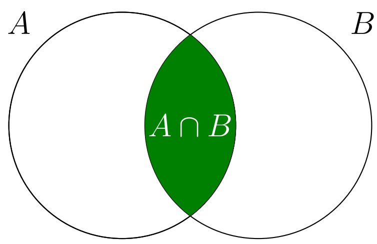
هناك عدد من المجموعات المهمة والتي سوف نستخدمها في هذا الكتاب وهي

- مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة (Integers) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد النسبية (Rational Numbers) $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers). وهذه المجموعة سوف نتعرف عليها بشكل مفصل في الباب الثاني.

العمليات على المجموعات

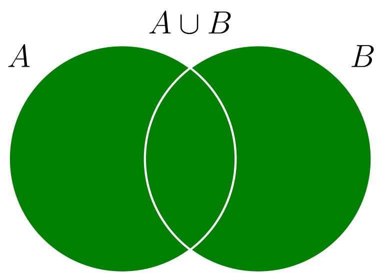
إذا كانت A و B مجموعتين، فإننا نعرف **التقاطع** (intersection) بأنه المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في كلا المجموعتين A و B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$



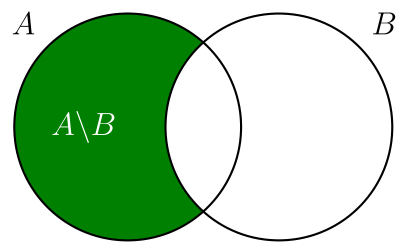
والاتحاد (union) بأنه المجموعة التي تضم جميع العناصر الموجودة في A أو B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$



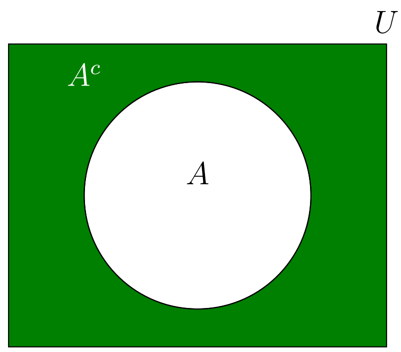
نعرف **متممة** (complement) B في المجموعة A بأنها المجموعة التي عناصرها في A وليست في B، ويرمز لها بالرمز $A \backslash B$

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$



تُسمى المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر بأنها المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ. كما أننا نفترض وجود مجموعة شاملة U تضم جميع عناصر المجموعات محل البحث. وفي دراستنا ستكون هذه المجموعة هي الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ونعرف **متممة** A بأنها العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وغير موجودة في A، ونرمز لها بالرمز A^c.

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$



هناك علاقة مهمة تربط بين التقاطع والاتحاد والمتممة وتعرف بقانوني ديمورقان

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.2 الدوال

ننتقل الآن لمفهوم أساسي مهم وهو الدوال. وتعتبر الدالة كما سيتضح لاحقا حالة خاصة من المجموعات. لكن قبل الحديث عن الدوال، نحتاج لتعريف الضرب الديكارتي، والعلاقات.

الزوج المرتب (order pair)
إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، وكان $a \in A$ و $b \in B$، فإن المجموعة $\{a, b\}$ هي نفسها المجموعة $\{b, a\}$، ولكن لو رغبنا في ترتيب العناصر، فإننا نضعها كزوج مرتب والذي يعرف كما يلي

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

وبالتالي فإنه إذا كان $(a, b) = (c, d)$، فإن

$$\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\} \quad \Rightarrow \quad a = c, \;\; b = d$$

وهذا يعني أن الترتيب مهم في الأزواج المرتبة على عكس المجموعات.

الضرب الديكارتي (cartesian product)

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، فإن الضرب الديكارتي لهما هو المجموعة

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

العلاقة (relation)

تُعرف العلاقة R بين مجموعتين A و B بأنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب $A \times B$. ونقول إن العنصر $a \in A$ يرتبط مع العنصر $b \in B$، إذا كان $(a, b) \in R$.

بعد أن تعرفنا على العلاقات، نأتي الآن لتعريف الدالة والتي تعتبر حالة خاصة من العلاقات.

تعريف 1.1: الدالة function

إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، فإننا نعرف الدالة f من A إلى B بأنها علاقة $f \subset A \times B$ تحقق أنه لكل عنصر $a \in A$ يوجد عنصر وحيد $b \in B$ بحيث $(a, b) \in f$

وهذا يعني أنه لكل عنصر في A يوجد صورة وحيدة في B. إذا كان $(x, y) \in f$، فإننا نكتب $y = f(x)$. يُسمى A مجال الدالة (domain) و B المجال المقابل (co-domin) ونكتب

$$f : A \to B$$

يعرف مدى الدالة f (range) بأنه جميع الصور في B

$$R_f = \{b \in B : (a, b) \in f, a \in A\}$$

تكون الدالة f **غامرة** (surjective) إذا كان $B = R_f$، وتكون **أحادية أو متباينة** (injective) إذا كانت كل عنصر في R_f صورة لعنصر وحيد في A، إي إذا كان $f(a_1) = f(a_2)$، فإن $a_1 = a_2$. وتكون f تقابل (bijective) إذا كانت غامرة ومتباينة.

الدالة العكسية (inverse function)

إذا كانت $f : A \to B$ دالة أحادية، فإن لها دالة عكسية

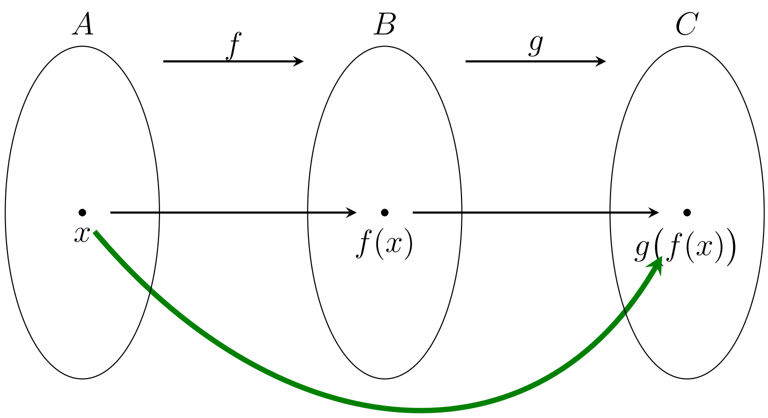
$$f^{-1} : R_f \to A$$

بحيث إذا كان $y = f(x)$، فإن $f^{-1}(y) = x$.

تحصيل الدوال (composition of functions)

إذا كانت $f : A \to B$ و $g : B \to C$، فإن تحصيل الدالتين $g \circ f$ هو دالة من A إلى C والمعرفة لكل $x \in A$ كما يلي

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



1.3 المنطق الرياضي وطرائق البرهان

إن البراهين الرياضية مبنية على تقارير (statements) والتقرير هو جملة تحمل خبرا ويمكن الحكم عليها بأنها صائبة (True) أو خاطئة ،(False) فمثلا التقرير $2+3=5$ تقرير صائب بينما $\sqrt{4}=-2$ تقرير خاطئ. أما عبارة "الجو جميل" فهي ليست تقريرا لأنها تعبر عن رأي. كذلك عبارة "هذه الجملة خاطئة" ليست تقريرا لأنها لا يمكن أن تكون صائبة أو خاطئة حيث نحصل على تناقض في كلا الحالتين.

هناك عدة طرق للحصول على تقرير جديد من تقارير سابقة وذلك باستخدام أدوات الربط (connectives) .

إذا كان p و q تقريرين رياضيين، فإنه يمكن الربط بينهما باستخدام أداة الربط "و" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\wedge$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

أداة الربط "**أو**" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\vee$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

أداة الربط "**إذا ... فإن ...**" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\rightarrow$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

أداة الربط "**إذا وإذا فقط**" ويرمز لها رياضيا بالرمز "$\leftrightarrow$"، ولها جدول الصواب

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

إذا كان p تقريرا، فإن "**نفي**" (negation) التقرير ويرمز له بالرمز "$\sim p$"، له جدول الصواب

p	$\sim p$
T	F
F	T

الاقتضاء (Implication)

من الطرق المهمة للحصول على تقرير جديد من تقارير أخرى تقرير الاقتضاء، ونقول إن التقرير A يقتضي التقرير B ونرمز لذلك بالرمز $A \Rightarrow B$، إذا كان التقرير $A \to B$ صائبا. وفي هذه الحالة يسمى التقرير A **المعطى** (hypothesis) بينما التقرير B **النتيجة** (conclusion).

نقول إن تقريرين متكافآن (equivalent) إذا كان لهما نفس جدول الصواب، ونرمز لذلك بالرمز ($\equiv$). في المبرهنات دائما ما يكون هنك معطى A ونتيجة B ونسعى لإثبات التقرير $A \Rightarrow B$. ولكن في بعض المبرهنات يمكن أن نثبت ذلك من خلال تقارير مكافئة لهذا التقرير. على سبيل المثال، التقريران الآتيان متكافآن.

$$A \to B \quad \equiv \quad \sim B \to \sim A$$

وهذا يعني أن

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \sim B \Rightarrow \sim A$$

المسورات (Quantfiiers)

تحتوي بعض التقارير الرياضية أحيانا على عبارات مثل "لكل" (for all) أو "يوجد" (there exists)، فعلى سبيل المثال، التقرير

"لكل عدد طبيعي n، فإن $n + 3 > n^2$"

تقرير خاطئ لأن التقرير غير صحيح عند $n = 3$ ، بينما التقرير

"يوجد عدد طبيعي n، بحيث $n + 3 > n^2$"

صائب، لأننا نستطيع اختيار $n = 1$.

هذان المسوران يستخدمان بكثرة في التقارير الرياضية، لذلك نستخدم الرمزين $\forall$ رمز الشمول بدلا من لكل، ورمز الوجود $\exists$ بدلا من يوجد. فيمكن إعادة كتابة التقريرين السابقين كما يلي

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n + 3 > n^2$$

$$\exists\, n \in \mathbb{N} : n + 3 > n^2$$

أحيانا نحتاج لنفي تقارير تحتوي على مسورات، ويكون النفي كالتالي

نفي التقرير $\forall x : A$ هو $\exists x : \sim A$

وبالتالي نفي التقرير

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n + 3 > n^2$$

هو

$$\exists\, n \in \mathbb{N} : n + 3 \leq n^2$$

وبالمثل

نفي التقرير $\exists x : A$ هو $\forall x : \sim A$

بعد هذه المقدمة المهمة في المنطق الرياضي، نستعرض عددا من طرائق البرهان.

1. **البرهان المباشر** (direct proof)
في هذه الطريقة نستفيد من كون علاقة الاقتضاء متعدية، أي إنه إذا كان $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow C$، فإن $A \Rightarrow C$. وهذا يعني أننا نبدأ بالمعطى، ثم ننتقل بخطوات صحيحة حتى نصل إلى النتيجة.

مثال 1.1. أثبت أن مربع أي عدد فردي n هو عدد فردي.
المعطى: A التقرير "n عدد فردي"
المطلوب إثباته (النتيجة): B التقرير "n^2 عدد فردي".
بما أن n عدد فردي، إذا يوجد عدد طبيعي k بحيث

$$n = 2k + 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1, \quad m = 2k^2 + 2k$$

إذا n^2 عدد فردي.

2. **المكافئ العكسي** (contrapositive) إذا كان التقرير $A \to B$ صائب، فإن التقرير $\backsim B \to \backsim A$ صائب كذلك، وهذا يعني أن الاقتضاء $A \Rightarrow B$ متحقق إذا كان الاقتضاء $\backsim B \Rightarrow \backsim A$ متحققا، والعكس صحيح. في البرهان بالمكافئ العكسي بدلا من إثبات $A \Rightarrow B$، نثبت أن $\backsim B \Rightarrow \backsim A$ أي إننا نفرض نفي النتيجة ثم نتوصل بخطوات صحيحة إلى نفي المعطى.

مثال 1.2. أثبت أنه إذا كان m و n عددين حقيقيين وكان $n + m > 10$ فإن $n > 5$ أو $m > 5$.
المعطى: A التقرير "$n + m > 10$"
النتيجة: B التقرير " $n > 5$ أو $m > 5$ ".
باستخدام المكافئ العكسي يكفي أن نثبت أن $\backsim B \Rightarrow \backsim A$. أي إثبات أنه إذا كان $n \leq 5$ و $m \leq 5$، فإن $n + m \leq 10$.

$$n \leq 5, m \leq 5 \quad \Rightarrow m + n \leq 5 + 5 = 10$$

3. **البرهان بالتناقض** (contradiction) لإثبات أن التقرير $A \to B$ صائب، يكفي إثبات أن التقرير $\backsim (A \to B)$ خاطئ. ولكن هذا التقرير يكافئ $A \wedge \backsim B$. إذا يكفي إثبات أن التقرير $A \wedge \backsim B$ خاطئ. هذا يعني أننا نفرض صحة المعطى وخطأ النتيجة في نفس الوقت فنتوصل إلى تناقض.

مثال 1.3. أثبت أنه إذا كان a عددا حقيقيا، وكان $a > 0$ فإن $\frac{1}{a} > 0$.
المعطى: A التقرير "$a > 0$"
النتيجة: B التقرير " $\frac{1}{a} > 0$ ".
نفرض أن المعطى $a > 0$ صحيح، وأن النتيجة $\frac{1}{a} > 0$ خاطئة، أي إن $\frac{1}{a} \leq 0$. بالضرب نحصل على $a\frac{1}{a} \leq 0$. ولكن $a\frac{1}{a} = 1$، إذا $1 \leq 0$ وهذا تناقض.

4. **البرهان بإعطاء مثال معاكس** (counter example) حتى نثبت أن تقريرا خاطئا، يكفي إعطاء مثال لا يحقق هذا التقرير.

مثال 1.4. هل التقرير

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$$

صحيح؟
بما أن العدد 0 لا يحقق هذا التقرير، إذا التقرير خاطئ.

5. **الاستقراء الرياضي** (induction) حتى نثبت أن التقرير $P(n)$ صائب لجميع الأعداد الطبيعية، فإنه يكفي أن نثبت أن التقرير صحيح عندما $n = 1$، ثم نثبت أنه بفرض صحة التقرير عندما $n = k$، فإن التقرير صحيح عندما $n = k + 1$ (سوف نتطرق لهذا الموضوع في الباب الثاني).

وفيما يلي مثال عن طرائق البرهان، وسوف نحتاج لهذه النتيجة في الأبواب القادمة.

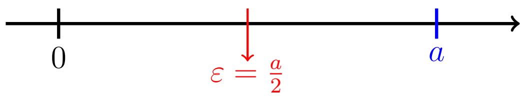
مثال 1.5. إذا كان $a \in \mathbb{R}$،

$$0 \leq a < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

فأثبت أن: $a = 0$. ثم استنتج أن $1 = 0.999\ldots$

البرهان: من المهم في البرهان تحديد المعطى، والنتيجة، وكذلك الطريقة المستخدمة في البرهان.

المعطى: $0 \leq a < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$
النتيجة: $a = 0$
طريقة البرهان: البرهان بالتناقض (أي نفرض صحة المعطى وخطأ النتيجة).
لنفرض أنه لكل $\varepsilon > 0$ فإن $0 \leq a < \varepsilon$ وأن $a \neq 0$. إذا $a > 0$. حتى نحصل على تناقض، يكفي إيجاد قيمة واحدة للعدد ε بحيث يكون $\varepsilon \leq a$. بما أن $0 < \frac{a}{2} < a$ ، فإننا نأخذ $\varepsilon = \frac{a}{2}$ ، فنحصل على تناقض. إذا $a = 0$.



لإثبات أن $1 = 0.999\ldots$، يمكن أن نعرف العدد $a_n = 0.999..9$ حيث يوجد n من التسعات بعد الفاصلة. من الواضح أنه لكل $\varepsilon > 0$، فإننا نستطيع اختيار $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$0 \leq 1 - 0.999\ldots < 1 - a_n < \varepsilon$$

إذا $1 - 0.999\ldots = 0$ □

تمارين الباب الأول

1. إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ليس كلاهما صفرا، فأثبت أن $x^2 + xy + y^2 > 0$.
2. إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ليس كلاهما صفرا، فما الشرط على a بحيث $x^2 + axy + y^2 > 0$؟
3. إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$، فأثبت أن

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

4. ⋆ إذا كان $0 < a < 1$ و $b = 1 - \sqrt{1 - a}$، فأثبت أن $0 < b < a$.
5. إذا كان $a > 2$ و $b = 1 + \sqrt{a - 1}$، فأثبت أن $2 < b < a$.
6. إذا كان $0 < x < y$، فأثبت أن

$$\frac{x + 2}{x + 3} < \frac{y + 2}{y + 3}$$

7. إذا كان $a, b > 0$، فأثبت أن $a > b$، إذا وفقط إذا كان $a^2 > b^2$.

8. يعرف الوسط الحسابي للعددين $a, b > 0$ بأنه $\frac{a+b}{2}$ والوسط الهندسي $\sqrt{ab}$. أثبت أن

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان $a = b$.

9. ⋆ إذا كان

$$|x - x_0| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right\}, \qquad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}$$

فأثبت أن

$$|xy - x_0 y_0| < \varepsilon$$

الباب الثاني

الأعداد الحقيقية

في هذا الباب نقدم عددا ن الخواص المهمة لمجموعة الأعداد الحقيقية. وسوف نقدم الأعداد الحقيقية عن طريق المسلمات ولن نشير إلى طريقة بناء الأعداد الحقيقية من مجموعة أبسط مثل الأعداد النسبية. بل سنفترض وجود الأعداد الحقيقية ونحدد خصائصها.

في البداية نتطرق لمجموعة الأعداد الطبيعية، الصحيحة، النسبية وغير النسبية ثم الأعداد الحقيقية والبناء الجبري لها. ثم نركز على خاصية متوفرة فقط في الأعداد الحقيقية وهي خاصية التمام، بعد ذلك نتطرق للمفكوك العشري للأعداد الحقيقية، ثم نختم الباب بالحديث عن المجموعات القابلة للعد.

2.1 الأعداد الطبيعية والاستقراء الرياضي

نرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers)، بالرمز $\mathbb{N}$،

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

وتتميز الأعداد الطبيعية بأنها تحقق مسلمة (مانقبله بدون برهان) إن أي مجموعة غير خالية من الأعداد الطبيعية لها عنصر أصغر .

مسلمة 2.1: خاصية الترتيب التام للأعداد الطبيعية Well Ordering Property of $\mathbb{N}$

كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر.

إذا إردنا إثبات أي مبرهنة أو خاصية للأعداد الطبيعية، فإن أهم أدا نستخدمها هي الاستقراء الرياضي. حيث نستطيع استنتاج صحة عبارة رياضية لجميع الأعداد الطبيعية دون الحاجة لفحص هذه العبارة لجميع الأعداد الطبيعية.

تعريف 2.1: مبدأ الاستقراء الرّياضي Principle of Mathematical Induction

إذا كان $P(n)$ تقريرا رياضيا ، وكان

1. $P(1)$ تقريرا صائبا.
2. لأي عدد $k \in \mathbb{N}$، إذا كان التقرير $P(k)$ صائبا، فإن التقرير $P(k+1)$ صائبا كذلك.

فإن التّقرير $P(n)$ صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

مثال 2.1. أثبت أنه لكل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$، فإن

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ليكن $P(n)$ التقرير الآتي

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

من الواضح أن $P(1)$ أي $1 = \frac{(1)(1+1)}{2}$ صائب.
نفرض أن $P(k)$ صائب حيث $k \in \mathbb{N}$، أي

$$1 + 2 + \ldots k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ونسعى لإثبات صحة التقرير $P(k+1)$، لذلك نضيف $k+1$ للطرفين فنحصل على

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots k + \color{red}{(k+1)} &= \frac{k(k+1)}{2} + \color{red}{(k+1)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{\color{red}{(k+1)}[\color{red}{(k+1)} + 1]}{2} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $P(k+1)$ صائب، ونستنتج من مبدأ الاستقراء الرياضي أن $P(n)$ صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

2.2 الحقول المرتبة

إن مجموعة الأعداد الحقيقية تعتبر "حقلا مرتبا تاما" ومن خلال هذا الفصل نتعرف على خواص الحقول المرتبة، ثم نعطي تعريفا للحقل التام. ونهدف من ذلك إلى التعرف على الخصائص الجبرية للأعداد الحقيقية.
نبدأ الآن بفرض وجود مجموعة $\mathbb{R}$ تدعى الأعداد الحقيقية وعمليتين الجمع $+$ والضرب $\cdot$ بحيث تحقق الخصائص الآتية

تعريف 2.2

إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{R}$، فإن

1. $x + y \in \mathbb{R}$
2. $x + y = y + x$
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$

4. يوجد عدد حقيقي وحيد 0 بحيث $x + 0 = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

5. لكل $x \in \mathbb{R}$ يوجد عدد حقيقي وحيد $-x$ بحيث $x + (-x) = 0$.

6. $x \cdot y \in \mathbb{R}$

7. $x \cdot y = y \cdot x$

8. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

9. يوجد عدد حقيقي وحيد 1 بحيث $x \cdot 1 = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

10. لكل $x \in \mathbb{R}$ يوجد عدد حقيقي وحيد x^{-1} بحيث $x \cdot (x^{-1}) = 1$.

11. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

تسمى هذه المسلمات مسلمات الحقل، وهذا يعني أن إن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ تمثل حقلا.

وإضافة لمسلمات الحقل، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية تحقق كذلك ملسمات الترتيب. لتكن "$<$" علاقة فإنها تكون علاقة ترتيب إذا حققت

تعريف 2.3

إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{R}$، فإن

1. واحدة من العلاقات محققة $x = y$ أو $x < y$ أو $x > y$.

2. إذا كان $x < y$ و $y < z$ فإن $x < z$.

3. إذا كان $x < y$، فإن $x + z < y + z$.

4. إذا كان $x < y$ و $z > 0$ فإن xz, yz.

في كثير من البراهين نحتاج للمتباينات والقيمة المطلقة ، وهنا تعريف القيم المطلقة. إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإنا نعرف القيمة المطلقة للعدد x كما يلي

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

مبرهنة 2.1: متطابقة المثلث

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ ، فإن

$$| a + b | \leq | a | + | b |$$

$$|| a | - | b || \leq | a - b |$$

تمرين 1 : هل هذه العبارة صحيحة دائمًا؟

$$b < c \Rightarrow | a + b | < | a + c |$$

مثال 2.2. إذا كان

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

فأثبت أن: $a \leq b$. هل العكس صحيح؟

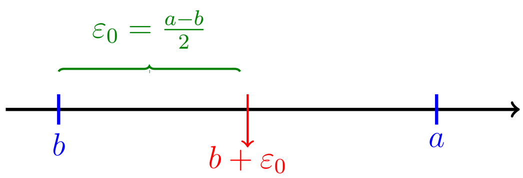
البرهان

المعطى: $A: \quad a < b + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$

المطلوب: $B: \quad a \leq b$

طريقة البرهان: عكس المباشر. (أي إثبات أن $\sim B \Rightarrow \sim A$)

نفرض أن $a > b$، ولنأخذ $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0$. نلاحظ أن $a > b + \varepsilon_0$ أي أننا توصلنا إلى نفي المعطى، وهذا يثبت أن $a \leq b$.



$\square$

تمرين 2 :
إذا كان $|x| < \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$، فاستنتج أن $x = 0$.

الأعداد الصحيحة Integers

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

ملاحظة 1.

- $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة إبدالية .
- المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{Z}$.

الأعداد النسبية Rational Numbers

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

ملاحظة 2.
$(\mathbb{Q}, +, *)$ حقل مرتب

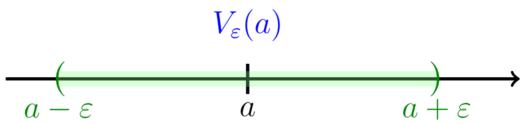
الأعداد الحقيقية Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R}, +, *)$ تشكل حقل مرتب ، وتحتوي على الأعداد النسبية والتي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z},\ \ b \neq 0$، والأعداد غير النسبية، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}^c$ أو $\mathbb{I}$.

تعريف 2.4: جوار - ε

إذا كان $a \in \mathbb{R},\ \ \varepsilon > 0$ ، فإننا نعرف جوار- ε للعدد a بأنه

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$



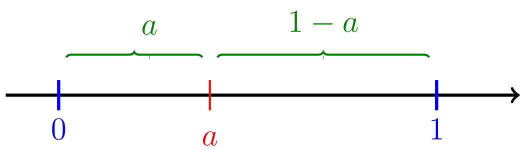
لاحظ أنه إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، وكان

$$x \in V_\varepsilon(a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

فإن $x = a$.

تمرين 3 :

إذا كانت $A = (0, 1)$، و $a \in A$ بحيث $V_\varepsilon(a) \subset A$ ، فما أكبر قيمة للعدد ε ؟



2.3 مسلمة التمام

في الفصل السابق وضحنا مسلمات الحقل المرتب للأعداد الحقيقية. ولكن هذه المسلمات لوحدها غير كافية لتعريف الأعداد الحقيقية. حيث إن الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ تمثل حقلا مرتبا كذلك. لكن لو تأملنا الأعداد النسبية، فإننا نلاحظ تحتوي على فراغات (gaps) فعلى سبيل المثال $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي كما توضحه المبرهنة الآتية

مبرهنة 2.2:

المعادلة $x^2 = 2$ ليس لها حل في $\mathbb{Q}$.

البرهان

نفرض أن $x \in \mathbb{Q}$،وبالتالي يوجد $a, b \in \mathbb{N}$ والقاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1، أي $(a, b) = 1$ بحيث

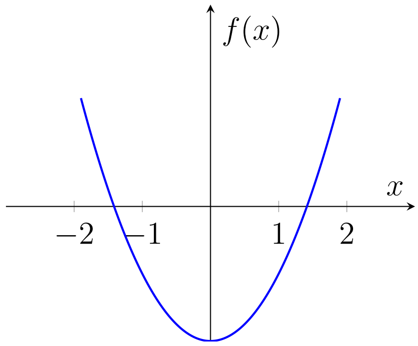
$$x = \frac{a}{b} \quad \Longrightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Longrightarrow a^2 = 2b^2$$

وهذا يعني أن $2 \mid a^2$، وبالتالي $2 \mid a$، أي أنه يوجد عدد $c \in \mathbb{N}$ بحيث $a = 2c$، ونحصل على

$$a^2 = (2c)^2 = 2b^2 \quad \Longrightarrow 2c^2 = b^2$$

إذا $2 \mid b^2$، وبالتالي $2 \mid b$، أي $2 \leq (a,b)$ وهذا تناقض. □

سوف نوضح لماذا الأعداد النسبية غير مناسبة للتحليل. لو اعتبرنا الدالة $f(x) = x^2 - 2$، فمن الواضح من هذه الدالة تتقاطع مع محور x في عدد بين 1 و 2. لو افترضنا أن محور x يتكون فقط من أعداد نسبية، فإن مثل هذا العدد غير موجود.



مثال 2.3. لتكن $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. ما أكبر عنصر في A؟

ولكن فهم أساسيات التفاضل والتكامل يعتمد على مفاهيم النهايات والاتصال والتي تتطلب أن نعمل في مجموعة ليس فيها فراغات. وتعرف هذه الخاصية بخاصية التمام للأعداد الحقيقية. (completeness property) .

تعريف 2.5: الحد العلوي والحد السفلي

1. نقول إن $u \in \mathbb{R}$ حد علوي (upper bound) للمجموعة A، إذا كان $a \leq u$ لكل $a \in A$.
   وتكون المجموعة A محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي.
2. نقول إن $l \in \mathbb{R}$ حد سفلي (lower bound) للمجموعة A، إذا كان $l \leq a$ لكل $a \in A$.
   وتكون المجموعة A. محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي
3. تكون المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي يوجد $l, u \in \mathbb{R}$ بحيث
$$l \leq a \leq u \qquad \forall a \in A$$

مثال 2.4. أوجد حدان علويان وحدان سفليان للمجموعات الآتية إن وجدت::
1- $[1,4)$
2- $(2,\infty)$

تعريف 2.6:

1. إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي أصغر (supremum) ويرمز له بالرمز $\beta = \sup A$ إذا تحقق
   (أ) $\beta \in \mathbb{R}$ حد علوي للمجموعة A ، أي
$$a \leq \beta \qquad \forall a \in A$$

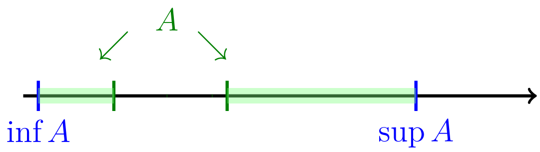
(ب) إذا كان u حدا علويا للمجموعة A، فإن

$$\beta \leq u$$

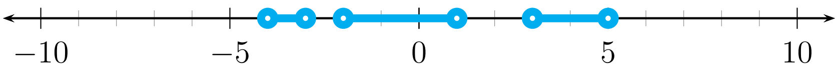
2. إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ ، فإن $\alpha \in \mathbb{R}$ حد سفلي أكبر للمجموعة A (infimum) ويرمز له بالرمز $\alpha = \inf A$ إذا كان حدا سفليا، ولا يوجد حد سفلي أكبر منه.

ملاحظة

- الحد العلوي الأصغر، والحد السفلي الأكبر قد ينتمي للمجموعة وقد لا ينتمي.



تمرين 4 : ما الحدود العلوية والسفلية للمجموعة التالية؟



ملاحظات

1. إذا كان $\sup A \in A$ ، فإن $\sup A = \max A$ ، حيث $\max A$ هو أكبر عنصر في A.

2. إذا كان $\inf A \in A$ ، فإن $\inf A = \min A$ ، حيث $\min A$ هو أصغر عنصر في A.

3. الحد العلوي الأصغر وحيد (ويمكن إثبات ذلك بفرض وجود حدين علويين أصغرين β و γ. وبما أن β حد علوي، فإن $\beta \leq \gamma$, وبما أن γ حد علوي، فإن $\gamma \leq \beta$، وبالتالي $\beta = \gamma$).

4. الحد السفلي الأكبر وحيد

مثال 2.5.
أوجد $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ للمجموعات التالية إن وجدت.

1. $A = \{1, 2, 5\}$
2. $A = [2, 5)$
3. $A = \mathbb{Q}$
4. $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
5. $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

مبرهنة 2.3

إذا كان β حدا علويا للمجموعة A ، فإن $\beta = \sup A$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A : \qquad \beta - \varepsilon < a$$

البرهان $(\Leftarrow)$ ليكن $\beta = \sup A$، ولنفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث

$$\beta - \varepsilon \geq \varepsilon \qquad \forall a \in A$$

إذا $\beta - \varepsilon$ حد علوي للمجموعة A. وهذا يناقض أن β أصغر حد علوي.
$(\Rightarrow)$ الآن لنفرض أن β حدا علويا للمجموعة A، وأنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث

$$\beta - \varepsilon < a$$

وليكن u حد علوي للمجموعة A. إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث

$$\beta - \varepsilon < a \leq u$$

$$\beta < u + \varepsilon$$

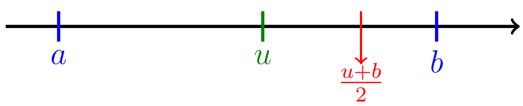
$$\beta \leq u$$

وهذا يعني أن β هو أصغر حد علوي. $\square$

مثال 2.6. إذا كانت A أي من الفترات $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$ فإن

$$\sup A = b, \qquad \inf A = a$$

البرهان
لتكن $A = (a,b)$. سنثبت أن $\sup A = b$
من تعريف الفترة، $a < c < b$ لكل $c \in A$، وبالتالي b حد علوي للمجموعة A.
ليكن u حدا علويا للمجموعة A، ولنفرض أن $a < u < b$.
بما أن $\frac{u+b}{2} \in A$ و $u < \frac{u+b}{2}$، فإن هذا يناقض أن u حد علوي للمجموعة A، إذا $b \leq u$، وبالتالي $b = \sup A$.



$\square$

من الكافي التركيز على دراسة أصغر حد علوي لمجموعة، لأننا نستطيع الحصول على أكبر حد سفلي عن طريق المبرهنة التالية.

مبرهنة 2.4:

إذا كانت $-A = \{-a : a \in A\}$ ، فإن المجموعة A محدودة من أسفل إذا وفقط إذا كانت $-A$ محدودة من أعلى،

وكذلك
$$\inf A = -\sup(-A)$$

البرهان إذا كانت A محدودة من أسفل، فإنه يوجد عدد $l \in \mathbb{R}$ بحيث
$$l \leq a \qquad \forall a \in A$$
إذا
$$-l \geq -a \qquad \forall a \in A$$
$$-l \geq -a \qquad \forall -a \in -A$$
إذا $-l$ حد علوي للمجموعة $-A$. وبالمثل يمكن إثبات الإتجاه الآخر.
ليكن $\alpha = \inf A$, فإن هدفنا إثبات أن $-\alpha = \sup -A$.
بما أن $\alpha = \inf A$، إذا
$$\alpha \leq a \qquad \forall a \in A$$
$$-\alpha \geq -a \qquad \forall -a \in -A$$
إذا $-\alpha$ حد علوي للمجموعة $-A$.
إذا كان u حدا علويا للمجموعة $-A$، فإن $-u$ حد سفلي للمجموعة A، وبالتالي
$$-u \leq \alpha \qquad \Rightarrow u \geq -\alpha$$
إذا $-\alpha$ هو أصغر حد علوي للمجموعة $-A$. وبالتالي
$$-\alpha = \sup(-A) \qquad \Rightarrow \inf A = -\sup(-A)$$
□

الخاصية الآتية توضح الفرق بين الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية.

تعريف 2.7: مسلمة التمام Completeness axiom

1. إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أعلى، فإن لها حدا علويا أصغر في $\mathbb{R}$.
2. إذا كانت $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ ، محدودة من أسفل، فإن لها حدا سفليا أكبر في $\mathbb{R}$.

نستطيع من هذه المسلمة استنتاج العديد من النتائج المفيدة وفيما يلي بعض هذه النتائج.

مبرهنة 2.5:

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى.

البرهان المجموعة $\mathbb{N}$ ليست خالية لأن $1 \in \mathbb{N}$. إذا فرضنا أنها محدودة من أعلى، فإن لها حدا علويا أصغر ولنفرض أنه β. إذا
$$n \leq \beta \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow n + 1 \leq \beta$$
$$\Rightarrow n \leq \beta - 1$$

وهذا يعني أن $\beta - 1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا تناقض لأن β أصغر حد علوي. إذا $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى. $\square$

ويمكن أن نستنتج من هذه المبرهنة النتيجتين التاليتين:

نتيجة 2.1: خاصية أرخميدس

لكل $x > 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$.

البرهان لنفرض أنه لا يوجد عدد $n \in \mathbb{N}$ يحقق ذلك، فهذا يعني أن

$$\frac{1}{n} \geq x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{1}{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا يعني أن $\frac{1}{x}$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا تناقض مع المبرهنة السابقة. $\square$

نتيجة 2.2

لكل $x \geq 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n - 1 \leq x < n$.

البرهان لنعتبر المجموعة $A = \{m \in \mathbb{N} : x < m\}$. بما أن $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى، إذا $A \neq \phi$. ومن خاصية الترتيب التام للمجموعة $\mathbb{N}$، فإن A لها عنصر أصغر وليكن n. إذا $x < n$. كما أن $n - 1 \leq x$ (لأنه لو كان $x < n - 1$، فإن n ليس عنصرا أصغرا للمجموعة A)، إذا $n - 1 \leq x < n$. $\square$

مثال 2.7. ما هي قيم $x \in \mathbb{R}$ التي تحقق $x \leq \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$؟

بما أن $\frac{1}{n} > 0$، إذا أي عدد في الفترة $(-\infty, 0]$ يحقق هذه المتباينة. والسؤال الآن هل يوجد عدد موجب يحقق المتباينة؟ الأجابة: لا، لأنه من خاصية أرخميدس، فإنه لأي عدد موجب x ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$.

تمرين 5 : حدد جميع قيم x التي تحقق

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x \leq \frac{1}{n}, \quad x \in [0, \infty)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x \leq \frac{1}{n}, \quad x \in \mathbb{R}^+$

نأتي الآن لبعض خصائص الأعداد النسبية وغير النسبية. كل من الأعداد النسبية وغير النسبية منتشرة على خط الأعداد الحقيقية ولا يمكن أن نجد فترة مفتوحة تضم أعدادا نسبية فقط أو أعدادا غير نسبية فقط. وقبل إن نثبت هذه الخاصية، نورد التمرين الآتي والذي يبين أنه بين كل عددين نسبيين يوجد عدد نسبي.

تمرين 6 : إذا كانت $p, q \in \mathbb{Q}$ و $p < q$، فأثبت أنه يوجد عدد نسبي في الفترة (p, q).

مبرهنة 2.6: كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة (x, y) في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا نسبيا $q \in \mathbb{Q}$.

البرهان إذا كان $y - x > 1$، فإنه يوجد عدد صحيح في الفترة (x, y). أما إذا كان $0 < y - x \leq 1$، فإنه من نتيجة أرخميدس، يوجد عدد $n \in \mathbb{N}$، بحيث

$$y - x > \frac{1}{n}$$
$$ny - nx > 1$$

إذا يوجد عدد صحيح m في الفترة (nx, ny), لأن طولها أكبر من 1.

$$nx < m < ny$$

$$x < \frac{m}{n} < y$$

$\square$

وهذا يعني أن كل فترة مفتوحة تضم عددا لا نهائيا من الأعداد النسبية.

تمرين 7 : باستخدام طريقة البرهان السابقة، أوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث

$$\sqrt{2} < q < \sqrt{3}$$

مبرهنة 2.7: نظرية: كثافة $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$

كل فترة مفتوحة (x, y) في $\mathbb{R}$ تحتوي عددا غير نسبي $r \in \mathbb{Q}^c$.

البرهان من المبرهنة السابقة، يوجد عدد نسبي $q \neq 0$ في الفترة $(x\sqrt{2}, y\sqrt{2})$ بحيث

$$x\sqrt{2} < q < y\sqrt{2}$$

$$x < \frac{q}{\sqrt{2}} < y$$

نختار العدد $r = \frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}^c$. (كيف يمكن إثبات أن هذا العدد غير نسبي؟) $\square$

المفكوك العشري

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإنه يوجد عدد $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، وأعداد $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ، بحيث

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ونكتب

$$x = x_0.x_1x_2\ldots$$

ويسمى الطرف الأيمن المفكوك العشري للعدد x.

ملاحظات:

1. إذا كان لعددين نفس المفكوك العشري، فإنهما متساويان.
2. لكل عدد $x > 0$ مفكوك عشري وحيد.
3. لو غيرنا الشرط السابق إلى

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} \leq \frac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

فقد يكون لبعض الأعداد مفكوكين.

$$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots$$
$$\frac{1}{2} = 0.499999\ldots$$

مثال 2.8. أوجد قيمة p, q بحيث $2.2343434... = 2.2\overline{34} = \frac{p}{q}, (p,q) = 1$

2.4 المجموعات القابلة للعد

في أواخر القرن التاسع عشر نشأت نظرية المجموعات على يد عالم الرياضيات الألماني جوج كانتور

تعريف 2.8: تكافؤ المجموعات

نقول إن المجموعتين A و B متكافئتان، ونرمز لذلك بالرمز

$$A \sim B$$

إذا وجد تقابل $f : A \to B$.

تعريف 2.9:

نقول إن المجموعة A منتهية، إذا كانت خالية أو وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

تكون المجموعتان المنتهيتان متكافئتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس عدد العناصر.

مثال 2.9.
إذا كانت $\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$ و $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$، فإن

1. $\mathbb{N}_1 \sim \mathbb{N}_2$
2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$، على الرغم من أن $\mathbb{N}_2 \subsetneqq \mathbb{N}$.
3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

تعريف 2.10: المجموعة القابلة للعد

نقول إن المجموعة A قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

فيما يلي عدد من المبرهنات المهمة عن المجموعات القابلة للعد.

مبرهنة 2.8:

كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.9:

كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي قابلة للعد.

مبرهنة 2.10:

إذا كانت A, B قابلة للعد، فإن $A \times B$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.11:

إذا كانت A_n قابلة للعد لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.12:

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

مبرهنة 2.13:

المجموعة $[0, 1)$ غير قابلة للعد.

مبرهنة 2.14:

المجموعة $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

تمرين 8 :

1- هل المجموعة $\{x \in \mathbb{Q}^c : x \in [0, 1]\}$ قابلة للعد

2- أثبت أن

أ) $(2, 6) \sim (7, 12)$

ب) $(0, \infty) \sim (0, 1)$

تمارين الباب الثاني

1. أثبت أن $\sqrt{3}, \sqrt{6}$ عددين غير نسبيين.
2. إذا كان $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$، فأثبت أن $x + y \notin \mathbb{Q}$. ماذا عن xy؟
3. إذا كانت $a, b, c, d > 0$، وكان $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$، فأثبت أن $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
4. إذا كان $a > 0, x < y$, فأثبت أنه يوجد عدد نسبي q بحيث
$$x < qa < y$$
5. إذا كانت $A \neq \phi$، فأثبت أن u حد علوي للمجموعة A إذا وفقط إذا كان لكل $t > u$، فإن $t \notin A$.
6. أوجد $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ للمجموعات الآتية إن وجدت
   (ا) $\star\star$ $A = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   (ب) $A = \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   (ج) $\star$ $A = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$
   (د) $A = \left\{\sin \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   (هـ) $\star\star$ $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$
   (و) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 2 > 0\}$
   (ز) $A = \{x^2 \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$
7. إذا كانت A تحتوي أحد حدودها العلوية، فأثبت هذا الحد العلوي هو $\sup A$.
8. لتكن
$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$$
إذا كان $p \in A$، فأثبت وجود $q \in A$، و $q > p$.
9. إذا كان α حدا سفليا للمجموعة A ، فأثبت أن $\alpha = \inf A$ إذا وفقط إذا كان
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A : \qquad a < \alpha + \varepsilon$$
10. $\star$ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، وكان $A \subset B$، فأثبت أن
$$\sup A \leq \sup B$$
11. إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين من أعلى، فأثبت أن $A \cup B$ محدودة من أعلى، وأن
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$
12. $\star$ إذا كانت $A, B \subset \mathbb{R}$ مجموعتين محدودتين، فأثبت أن $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ محدودة، ثم أثبت أن
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

13. ⋆ إذا كانت

$$A = \left\{ \frac{-n}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ x^2 \in \mathbb{R} : -2 < x < 1 \right\}$$

فأوجد $\sup(A + B)$.

14. إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ محدودة من أعلى و $k > 0$، وعرفنا $kA = \{ka : a \in A\}$، فأثبت أن

$$\sup(kA) = k \sup A$$

15. إذا كانت A, B مجوعتين غير خاليتين وكان

$$x \leq y \quad \forall x \in A, y \in B$$

فأثبت أن $\sup A \leq \inf B$.

16. اكتب العدد $0.12\overline{124}$، على الصورة $\frac{m}{n}$، حيث $(m, n) = 1$.

17. استخدم المفكوك العشري لإثبات كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

18. أثبت أن $(0, 2) \sim (2, 9)$.

19. ⋆ أثبت أن $\mathbb{R} \sim (0, 1)$.

20. أثبت أن $[0, 1] \sim [0, 1) \sim (0, 1)$.

21. أثبت أن $[0, 1] \times [0, 1] \sim [0, 1]$.

الباب الثالث

المتتاليات

في هذا الباب نتطرق لأحد الموضوعات المهمة في التحليل الحقيقي وهو المتتاليات. يعود مفهوم تقارب المتتاليات لبدايات القرن التاسع عشر الميلادي على يد كل من بولزانو (1817م) وكوشي (1821م). في هذا الباب، نستعرض عددا من النتائج والنظريات، والتي قد يبدو بعضها مألوفا لدى القارئ من دراسته للتفاضل والتكامل، ولكن ما نقدمه يتميز بالصرامة الرياضية، ويركز على البرهان أكثر من الحسابات.

في البداية نقدم مفهوم تقارب المتتاليات، حيث نتعرض للمرة الأولى لمفهوم النهايات، ثم نتطرق لخصائص المتتاليات المتقاربة. بعد ذلك، نتعرف على المتتاليات المطردة ونثبت أن كل متتالية مطردة ومحدودة فهي متقاربة. ثم نلقي الضوء على معيار كوشي والذي يعد معيارا لتقارب المتتاليات. ثم نختم هذا الفصل بالمتتاليات الجزئية، ومبرهنة بولزانو فايرشتراس والتي تنص على أن كل متتالية محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.

3.1 المتتاليات المتقاربة

تعتبر المتتالية نوعا خاصا من الدوال، حيث مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية.

تعريف 3.1: المتتالية sequences

المتتالية الحقيقية (sequence of real numbers) هي دالة f مجالها الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومداها الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، أي

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

ونرمز للعدد $f(n)$ بالرمز x_n .

تحدد المتتالية لكل عدد طبيعي $1, 2, \ldots$ قيمة وحيدة في الأعداد الحقيقية، ونكتب المتتالية بالصورة $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ أو $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ أو اختصارا (x_n)، ويسمى x_n الحد النوني. استخدام الأقواس يعني أننا نهتم بالترتيب، ولذا نفرق بين المتتالية (x_n) ذات العناصر المرتبة وغير المنتهية، والمجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ والتي تمثل مدى المتتالية وهي مجموعة غير مرتبة وقد تكون منتهية، فمثلا المتتالية $(1, 2, 3, 4, \ldots)$، تختلف عن المتتالية $(2, 1, 3, 4, \ldots)$، بينما المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ هي نفس المجموعة $\{2, 1, 3, 4, \ldots\}$. وفيما يلي نقدم بعض الأمثلة للمتتاليات.

مثال 3.1. 1. $(2) = (2, 2, 2, \ldots)$ هي متتالية ثابتة.

2. $(2n) = (2, 4, 6, \ldots)$ هي متتالية الأعداد الزوجية.

3. $((-1)^n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ هي متتالية مداها المجموعة $\{-1, 1\}$.

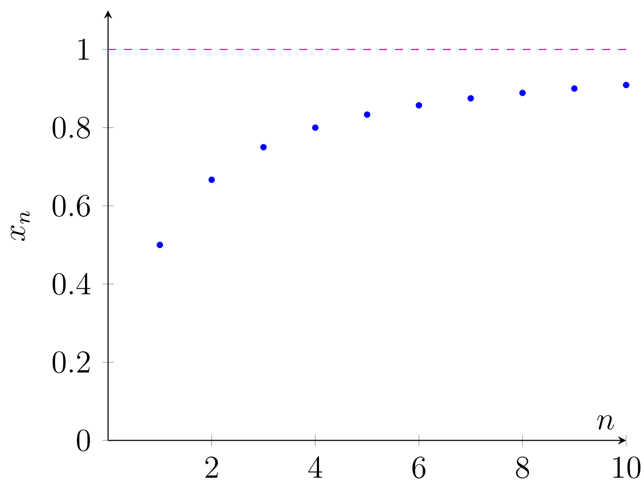
4. $(\frac{1}{n^2}) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots)$

5. يمكن تعريف المتتالية بدلالة الحدود السابقة، وتسمى متتالية ارتدادية (recursive sequence)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

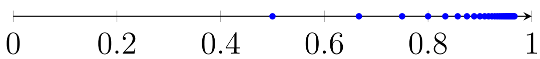
مثال 3.2. المتتالية $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ يمكن تمثيلها بيانيا كدالة كما في الشكل 3.1.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \ldots & \frac{n}{n+1} & \ldots \end{array}$$



شكل 3.1: $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

كما يمكن اختصار تمثيل المتتالية واقتصاره على المدى



هذا الاختصار ممكن إذا كانت عناصر المتتالية مختلفة، أما لو كانت العناصر تتكرر، فلن يكون التمثيل دقيقا.
في هذه المتتالية نلاحظ أنه كلما زادت قيمة n، كلما اقتربت المتتالية من العدد 1. وهذا يمكننا من القول إن المتتالية "متقاربة" للعدد 1. وسوف نوضح معنى تقارب المتتالية في التعريف القادم.

في المتتاليات، يكون التركيز على الحدود المتأخرة، فمثلا نجد أن الحدود المتأخرة للمتالية $(\frac{1}{n})$ قريبة من 0، بينما المتتالية (n) حدودها المتأخرة تتزايد وليست قريبة من أي عدد. وعند الحديث عن الحدود المتأخرة، فإننا نشير إلى النهاية والتي تعتبر بنية أساسية في التحليل. وفيما يلي نقدم التعريف الدقيق لتقارب المتتاليات.

تعريف 3.2: المتتالية المتقاربة

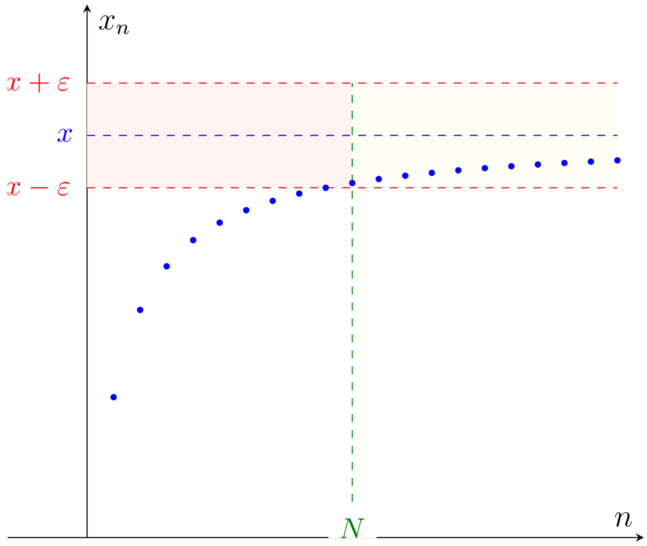
نقول إن المتتالية (x_n) متقاربة (convergent) إذا وجد عدد حقيقي x بحيث لكل $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي N يحقق أنه لكل $n \geq N$، فإن

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

يُسمى x نهاية المتتالية (limit)، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ أو اختصارا $\lim x_n = x$ ، أو $x_n \to x$.

إذا لم تكن المتتالية متقاربة إلى أي عدد حقيقي، فإنها متباعدة (divergent) .

في الشكل 3.2، نلاحظ أنه لأي قيمة معطاة للعدد ε، فإنه يوجد عدد N بحيث إذا كانت $n \geq N$، فإن x_n موجودة داخل الشريط الأصفر، وهذا يعني أن المتتالية متقاربة للعدد x.



شكل 3.2: المتتالية المتقاربة

فيما يلي نعطي عددا من الأمثلة لتوضيح طريقة إثبات أن نهاية المتتالية.

مثال 3.3. حتى نوضح أن

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، وهدفنا إيجاد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (أي $N > \frac{1}{\varepsilon}$). الآن، إذا كانت $n \geq N$، فإن $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$، ويمكن كتابة البرهان بشكل نهائي كما يلي:

إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نختار $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ وبالتالي

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

مثال 3.4. حتى نثبت أن النهاية الآتية صحيحة

$$\lim 3 + \frac{1}{2^n} = 3$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، وهدفنا إيجاد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

نستطيع هنا الحل مباشرة لإيجاد قيمة n، لكن من الأفضل ملاحظة أن

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

والتي يمكن إثباتها باستخدام الاستقراء الرياضي. من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (أي $N > \frac{1}{\varepsilon}$)، فنحصل على

$$\left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

تمرين 9 : أثبت باستخدام التعريف أن

1. $\lim \dfrac{n-1}{n} = 1$

2. $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (إرشاد: نختار $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$).

ملاحظات

1. إذا وجدنا عددا $N \in \mathbb{N}$ يحقق العلاقة

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

فإن أي عدد أكبر من N يحقق هذه العلاقة.

2. عندما نُغير قيمة ε، فقد نحتاج لتغيير قيمة N، وفي الغالب، كلما كانت قيمة ε أصغر، كلما احتجنا لاختيار قيمة أكبر للعدد N.

مثال 3.5. بما أن $\lim \dfrac{1}{n} = 0$، فإننا نستطيع إيجاد قيمة N لأي عدد $\varepsilon > 0$ بحيث تحقق العلاقة

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

لو اخترنا $\varepsilon = 0.1$، فيمكن أن نختار $N = 11$، لأن

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = 0.1 \qquad \forall\, n \geq 11$$

بينما لو اخترنا $\varepsilon = 0.01$، فإننا نحتاج لاختيار قيمة أكبر للعدد N، مثلا $N = 101$.

ملاحظات

1. إذا كانت المتتالية (x_n) تحقق أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ وثابت $C > 0$ لا يعتمد على n أو ε، بحيث
$$|x_n - x| < C\varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$
فإن $x_n \to x$.
(يمكن برهان ذلك كما يلي: إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نختار $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{C} > 0$، وبالتالي يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث
$$|x_n - x| < C\varepsilon_1 = \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N)$$

2. حتى نبين إن المتتالية (x_n) غير متقاربة إلى x، يكفي أن نوجد ε_0، بحيث لكل $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n_N \geq N$ تحقق
$$|x_{n_N} - x| \geq \varepsilon_0$$

مثال 3.6.
باستخدام التعريف يمكن إثبات أن :
$$\lim \frac{3n}{5n+9} = \frac{3}{5}$$
ليكن $\varepsilon > 0$، ولنوجد حدا علويا للفرق بين المتتالية ونهايتها.
$$\left|\frac{3n}{5n+9} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{15n - 3(5n+9)}{5(5n+9)}\right| = \frac{27}{25n+45} < \frac{27}{25n} = \frac{\frac{27}{25}}{n} < \frac{2}{n}$$
من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$. إذا نختار $N > \frac{1}{\varepsilon}$، فنحصل على
$$\left|\frac{3n}{5n+9} - \frac{3}{5}\right| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < 2\varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

مثال 3.7.
حتى نثبت أن
$$\lim \frac{n^2+2n}{n^3-4} = 0$$
نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، ونهدف لإيجاد قيمة $N \in \mathbb{N}$، بحيث لكل $n \geq N$، فإن
$$\left|\frac{n^2+2n}{n^3-4}\right| < \varepsilon$$
يمكن إيجاد حد علوي للبسط بدلالة n^2، وحد سفلي للمقام بدلالة n^3.
$$|n^2+2n| \leq n^2 + n^2 = 2n^2 \qquad \forall\ n \geq 2$$
$$|n^3-4| \geq n^3 - \frac{n^3}{2} \geq \frac{n^3}{2} \qquad \forall\ n \geq 3$$
إذا
$$\left|\frac{n^2+2n}{n^3-4}\right| \leq \frac{2n^2}{n^3/2} = \frac{4}{n}$$
من نتيجة أرخميدس، يوجد $N \geq 3$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$. إذا نختار $N > \max\{3, \frac{1}{\varepsilon}\}$.

تمرين 10 : أثبت باستخدام التعريف أن $\lim \dfrac{3n^2-2n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$

لإثبات أن المتتالية غير متقاربة، يكفي اختيار قيمة واحدة للعدد ε، كما في المثال التالي.

مثال 3.8. المتتالية $(x_n)=((-1)^n)$ غير متقاربة. حتى نرى ذلك، لنفرض أن (x_n) متقاربة إلى عدد x، ولنأخذ $\varepsilon=\frac{1}{2}$. إذا يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n-x|<\frac{1}{2} \qquad \forall\, n\geq N$$

بما أن

$$|x_{n+1}-x_n|=\left|(-1)^{n+1}-(-1)^n\right|=2$$

وبالتالي فإنه لكل $n\geq N$، فإن

$$2=|x_{n+1}-x_n|=|x_{n+1}-x+x-x_n|\leq|x_{n+1}-x|+|x-x_n|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

وهذا تناقض. إذا (x_n) غير متقاربة.

مثال 3.9. المتتالية $(x_n)=(n)$ غير متقاربة. حتى نرى ذلك، لنفرض أن x_n متقاربة إلى x، ولنأخذ $\varepsilon=1$. إذا يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n-x|=|n-x|<1 \qquad \forall\, n\geq N$$

وهذا يعني أنه لكل $n\geq N$، فإن

$$n<x+1$$

وهذا يعني أن $x+1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا تناقض. إذا (x_n) غير متقاربة.

ملاحظات

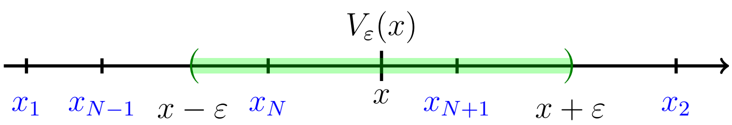
1. يعتمد تقارب المتتالية على الحدود المتأخرة والتي تسمى ذيل المتتالية. الذيل m للمتالية (x_n) ينتج من حذف أول m حدا، أي $(x_{m+1},x_{m+2},\dots)$. فمثلا الذيل الثالث للمتالية $(1,3,5,7,9,\dots)$ هو $(7,9,\dots)$.

2. من تعريف المتتالية المتقاربة نجد أن $x_n\to x$ إذا وفقط إذا كان $|x_n-x|\to 0$.

3. من الممكن استخدام الجوارات في تعريف تقارب المتتاليات. نلاحظ أنه إذا كانت $x_n\to x$، وكان $\varepsilon>0$، فإنه يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث لكل $n\geq N$

$$|x_n-x|<\varepsilon \;\Rightarrow\; x-\epsilon<x_n<x+\varepsilon \;\Rightarrow\; x_n\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$$

هذا يعني أن المتتالية متقاربة إذا كان لكل $\varepsilon>0$، يوجد بحيث $n\geq N$، فإن $x_n\in V_\varepsilon(x)$ لكل $N\in\mathbb{N}$. أي إن جميع حدود المتتالية ما عدا ربما $x_1,x_2,\dots,x_{N-1}$ تقع في $V_\varepsilon(x)$.



يمكن تعميم الملاحظة (3) لأي جوار.

تعريف 3.3: الجوار

إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن $V \subset \mathbb{R}$ جوار (neighborhood) للنقطة x إذا وجد $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ بحيث $V_\varepsilon(x) \subset V$

لتكن $x_n \to x$، وليكن V جوارا للنقطة x. إذا يوجد $\varepsilon > 0$، بحيث $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. وبالتالي يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n \in V_\varepsilon(x)$ لكل $n \geq N$، إذا $x_n \in V$. نستطيع تعريف التقارب باستخدام لغة الجوار كما يلي:
المتتالية (x_n) متقاربة ونهايتها x، إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي كل حدود المتتالية ما عدا عدد منته منها.

نختم هذا الفصل بخاصيتين مهمتين للمتتاليات المتقاربة.

مبرهنة 3.1

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فإن نهايتها وحيدة

البرهان لنفرض أن $x_n \to x$ و $x_n \to y$، إذا لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_1$$

$$|x_n - y| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N_2$$

وهذا يعني أنه إذا كان $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$، فإن

$$|x-y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < 2\varepsilon$$

وبما أن العبارة صحيحة لكل $\varepsilon > 0$، إذا $|x-y| = 0$، أي أن $x = y$. □

تعريف 3.4: المتتالية المحدودة

المتتالية (x_n) محدودة (bounded) إذا وجد $K > 0$ بحيث

$$|x_n| \leq K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

أي إن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة .

الآن نعطي شرطا ضروريا ولكنه ليس كافيا حتى تكون المتتالية متقاربة، وهو أن تكون المتتالية محدودة.

مبرهنة 3.2

المتتالية المتقاربة محدودة.

البرهان لنفرض أن $x_n \to x$، وبما أن هدفنا إيجاد حد علوي للأعداد $|x_n|$، فإننا نختار قيمة محددة للعدد ε، ولتكن $\varepsilon = 1$. إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < 1 \qquad \forall\, n \geq N$$

ولكن

$$|x_n| - |x| \leq |x_n - x| < 1 \;\Rightarrow\; |x_n| < |x| + 1 \qquad \forall\, n \geq N$$

نختار

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x| + 1\}$$

ونجد أن

$$|x_n| \leq K \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\square$

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح، حيث إن المتتالية $((-1)^n)$ محدودة وغير متقاربة.

تمارين 3.1

1. هل العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة مع التبرير؟
   (ا) إذا كانت $x_n \to 0$، فإنه لكل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.
   (ب) إذا كان لكل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n < \varepsilon$ لكل $n \geq N$، فإن $x_n \to 0$.
2. أوجد عددين $k > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث $5n^3 + 12n \leq kn^3$ لكل $n \geq N$.
3. أثبت ما يلي باستخدام التعريف:
   (ا) ⋆ $\lim \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$
   (ب) $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$
   (ج) $\lim \dfrac{2n^2+1}{4n^2+3n} = \dfrac{1}{2}$
   (د) $\lim \dfrac{n^2}{2n^3+3n^2} = 0$
   (هـ) $\lim \dfrac{2}{n} + \dfrac{2n}{n+2} = 2$
   (و) ⋆ $\lim \dfrac{n^3+1}{2n^3+n} = \dfrac{1}{2}$.
4. أثبت أن المتتالية الثابتة متقاربة.
5. ⋆ إذا كانت $\lim x_n = L$ و $\lim y_n = L$، فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ متقاربة ونهايتها L.
6. أثبت أن المتتالية $\cos \frac{n\pi}{3}$ ليست متقاربة.
7. أثبت أن الفترة (a, b) جوار لكل عنصر من عناصرها.

3.2 العمليات على المتتاليات

في الفصل 3.1، لاحظنا أن استخدام التعريف لإثبات وجود النهاية يقود أحيانا لحسابات مقعدة. في هذا الفصل نعطي عددا من النتائج المفيدة والتي تساعدنا في إيجاد النهاية بشكل مبسط. ونبدأ هذا الفصل بالمبرهنة الآتية والتي سوف نحتاجها عند الحديث عن العمليات على النهايات.

مبرهنة 3.3

إذا كانت $x_n \to x \neq 0$ ، فإنه يوجد $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n| > M \quad \forall\, n \geq N$$

البرهان

لنفرض أن $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$، فيمكن أن نجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \frac{|x|}{2} \qquad \forall\, n \geq N$$

وباستخدام متباينة المثلث نجد أنه لكل $n \geq N$، فإن

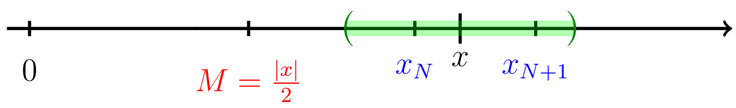
$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \frac{|x|}{2}$$
$$-\frac{|x|}{2} < |x_n| - |x| < \frac{|x|}{2}$$
$$\frac{|x|}{2} < |x_n| < \frac{3|x|}{2}$$

نختار

$$M = \frac{|x|}{2}$$

ونجد أن

$$|x_n| > M \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$



□

إذا كان لدينا متتاليتان، فإننا نستطيع جمع المتتاليتين عن طريق جمع كل حد من المتتالية الأولى مع الحد الذي يقابله في المتتالية الثانية، وكذلك بقية العمليات الأربع. المبرهنة الآتية تعطي العلاقة بين نهاية كل متتالية، والنهاية الناتجة عن جمع المتتاليتين أو ضربهما أو قسمتهما.

مبرهنة 3.4

إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتان متقاربتين، وكان $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$، فإن

1. $\lim(x_n + y_n) = x + y$
2. $\lim(x_n y_n) = xy$
3. إذا كان $k \in \mathbb{R}$، فإن $\lim(kx_n) = kx$
4. إذا كانت $y_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، و $y \neq 0$، فإن $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$.

البرهان

1. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

إذا اخترنا $N = \max\{N_1, N_2\}$، وكانت $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $x_n + y_n \to x + y$.

2. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

الآن نحسب

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \end{aligned}$$

وبما أن x_n محدودة، إذا يوجد $K > 0$ بحيث $|x_n| \leq K$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا اخترنا $N = \max\{N_1, N_2\}$، وكانت $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq K\varepsilon + |y|\varepsilon \\ &= (K + |y|)\varepsilon = C\varepsilon \end{aligned}$$

حيث $C = K + |y|$، وهذا يعني أن $x_n y_n \to xy$.

3. يمكن اختيار $y_n = k$ في الفقرة الثانية.

4. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

الآن نحسب

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \frac{|x_n y - x y_n|}{|y_n||y|} \\ &= \frac{|x_n y - xy + xy - x y_n|}{|y_n||y|} \\ &= \frac{|y||x_n - x| + |x||y - y_n|}{|y_n||y|} \end{aligned}$$

وبما أن $y_n \to y \neq 0$ ، إذا يوجد $M > 0$ و $N_3 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|y_n| \geq M \qquad \forall\, n \geq N_3$$

الآن إذا اخترنا $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$، وكانت $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &\leq \frac{|y|\varepsilon + |x|\varepsilon}{M|y|} \\ &\leq \frac{|y| + |x|}{M|y|}\,\varepsilon = C\varepsilon \end{aligned}$$

حيث $C = \dfrac{|y| + |x|}{M|y|}$، وهذا يعني أن $\dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow \dfrac{x}{y}$.

□

مثال 3.10. 1.

$$\lim \frac{2n+1}{n} = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

2.

$$\lim \frac{5n+1}{2n^2+4} = \lim \frac{\frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{4}{n^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

حيث قمنا بقسمة جميع الحدود على n^2.

مبرهنة 3.5

إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ، وكان

$$x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$x \le y$$

البرهان
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \implies \underbrace{x - \varepsilon < x_n} < x + \varepsilon \qquad \forall\ n \ge N_1$$

$$|y_n - y| < \varepsilon \implies y - \varepsilon < \underbrace{y_n < y + \varepsilon} \qquad \forall\ n \ge N_2$$

الآن إذا كانت $N = \max\{N_1, N_2\}$، فإن:

$$x - \varepsilon < x_n \le y_n < y + \varepsilon \qquad \forall\ n \ge N$$

$$x < y + 2\varepsilon \ \Rightarrow x \le y$$

□

ملاحظة

لو كانت $x_n < y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فلا نستطيع أن نستنتج أن $x < y$، مثلا $x_n = \frac{-1}{n}$ و $y_n = \frac{1}{n}$

مبرهنة 3.6: الحصر

إذا كانت

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge N_0$$

وكان $\lim x_n = \lim z_n = L$ ، فإن (y_n) متقاربة ونهايتها L .

البرهان
لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، فإنه يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall\ n \ge N_1, \qquad |z_n - L| < \varepsilon \quad \forall\ n \ge N_2$$

الآن إذا كانت $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$، وكانت $n \geq N$، فإن:

$$\underbrace{L-\varepsilon < x_n} < L+\varepsilon, \qquad L-\varepsilon < \underbrace{z_n < L+\varepsilon}$$

ونحصل على

$$L-\varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L+\varepsilon$$
$$L-\varepsilon < y_n < L+\varepsilon$$
$$|y_n - L| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\lim y_n = L$ $\square$

وفيما يلي عدد من الأمثلة التي توضح أهمية نظرية الحصر في إيجاد النهاية أو إثبات وجود النهاية بدون استخدام التعريف.

مثال 3.11.
لإيجاد النهاية $\lim \dfrac{\sin n}{n^2}$ ، نستخدم مبرهنة الحصر.

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$
$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

وبما أن

$$\lim \frac{-1}{n^2} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

إذا

$$\lim \frac{\sin n}{n^2} = 0$$

مثال 3.12.
إذا كان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $|x_n| \to |x|$. هل العكس صحيح؟

الحل
من متباينة المثلث،

$$0 \leq ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| \qquad \forall\ n \in N$$

وبما أن $|x_n - x| \longrightarrow 0$، إذا $|x_n| - |x| \longrightarrow 0$. أي إن

$$|x_n| \longrightarrow |x|$$

ولكن العكس غير صحيح، ويمكن اختيار $x_n = (-1)^n$
في الأمثلة الآتية نحتاج مبرهنة ذات الحدين، والتي نوردها بدون برهان.

مبرهنة 3.1: ذات الحدين

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

مثال 3.13. إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن $\lim a^n = 0$.

الحل

يمكن كتابة $a = \dfrac{1}{1+b}$ حيث $b > 0$. ومن مبرهنة ذات الحدين

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \ldots + b^n > nb$$

لاحظ أن

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb}$$

وبما أن $\dfrac{1}{nb} \longrightarrow 0$، إذا $a^n \longrightarrow 0$.

مثال 3.14. إذا كان $c > 0$ ، فإن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.

الحل

نبحث 3 حالات

1. إذا كان $c > 1$، فإنه يوجد $d_n > 0$ بحيث
$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n$$
ومن مبرهنة ذات الحدين
$$c = (1+d_n)^n > nd_n$$
وهذا يعني أن
$$0 < d_n < \frac{c}{n}$$
وبالتالي $d_n \to 0$، إذا
$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n \to 1$$

2. إذا كان $0 < c < 1$، فيمكن وضع $b = \dfrac{1}{c} > 1$، وبالتالي $b^{\frac{1}{n}} \to 1$. وهذا يعني أن
$$c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 1$$

3. إذا كان $c = 1$، فإن $(c^{\frac{1}{n}})$ متتالية ثابتة ونهايتها 1.

مثال 3.15. $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$

الحل

إذا كانت $n > 1$، فإن $n^{\frac{1}{n}} > 1$، وهذا يعني وجود $a_n > 0$ بحيث

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$$

ومن مبرهنة ذات الحدين

$$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \ldots + a_n^n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

أي إن

$$n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

وهذا يعني أن

$$0 < a_n^2 < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \qquad \forall\ n > 1$$

وهذا يعني أن $a_n^2 \longrightarrow 0$، إذا $a_n \longrightarrow 0$، وهذا يثبت أن

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n \longrightarrow 1$$

مثال 3.16. إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، وكان $x_n \to x$ ، فأثبت أن $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

الحل

نبحث حالتين: الأولى إذا كان $x = 0$، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - 0| < \varepsilon^2 \qquad \forall\ n \geq N$$

$$x_n < \varepsilon^2$$

$$\sqrt{x_n} < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\sqrt{x_n} \longrightarrow 0$.

الحالة الثانية إذا كان $x > 0$، فإن

$$0 \leq \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{\left|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right|} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}}$$

وبما أن $|x_n - x| \longrightarrow 0$، إذا $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \longrightarrow 0$. أي إن

$$\sqrt{x_n} \longrightarrow \sqrt{x}$$

3.2 تمارين

1. بين ما إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة أم لا، وأوجد النهاية إن وجدت.

(ا) $$x_n = \frac{n^2+1}{n^3+n}$$

(ب) $$x_n = \frac{n^2+n-1}{n+1}$$

(ج) ⋆ $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{3n-1}$

(د) $x_n = \dfrac{\sin n}{2n+1}$

(هـ) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

2. أوجد النهايات التالية

(ا) ⋆ $\lim \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^2} \right)$

(ب) $\lim \left(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{\sin(n^2)}{n+2} \right)^n$

(ج) $\lim \tan^{-1} n$

3. أعط مثالا لما يلي:

(ا) ⋆ متتاليتان $(x_n), (y_n)$ بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة، بينما (x_n) متباعدة.

(ب) متتاليتان $(x_n), (y_n)$ غير متقاربتين، ولكن $(x_n + y_n)$ متقاربة.

(ج) متتالية (x_n) غير متقاربة، ولكن $(|x_n|)$ متقاربة. ثم وضح متى نضمن تقارب المتتالية (x_n) إذا كانت $(|x_n|)$ متقاربة؟

4. إذا كانت $x_n \to x$، وكانت $x_n \le M$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن $x \le M$.

5. إذا كانت $x_n \to x$، وكان $x > 0$ فأثبت أن يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n > 0$ لكل $n \ge N$.

6. إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة من الأعداد الصحيحة، فماذا نستنتج؟

7. إذا كانت $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$، فأثبت أن $(\sqrt{n}\, x_n)$ متقاربة.

8. تعرف متتالية فيبوناتشي بالعلاقة

$$x_1 = 1, x_2 = 1$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right)$ متقاربة، وأوجد نهايتها.

9. ⋆ إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة، فأثبت أن (y_n) متقاربة. هل نستطيع استنتاج نتيجة مشابهة للمتتالية $(x_n y_n)$؟

10. إذا كانت (x_n) متقاربة، (y_n) غير متقاربة، ماذا نستنتج عن $(x_n + y_n)$ و $(x_n y_n)$.

11. إذا كانت $x_n \neq 0$ و $x_n \to 0$، فأثبت أن $(1/x_n)$ غير محدودة.

12. ⋆ إذا كان $0 < a < 1$، فأثبت أن $\lim n a^n = 0$

13. إذا كان $0 < a < b$، فأثبت أن $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

14. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق $|x_n - x_{n+1}| > c$ لعدد حقيقي $c > 0$، ولكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن (x_n) متباعدة.

15. إذا كانت (x_n) متتالية من الأعداد الموجبة، وكانت $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ فأثبت أن $x_n \to 0$. ماذا لو كانت $L = 1$؟ $L > 1$؟

16. بين هل المتتالية (x_n) متقاربة حيث $0 < a < 1 < b$

(ا) $x_n = \frac{n^3}{2^n}$

(ب) $x_n = n^2 a^n$

(ج) $x_n = \frac{b^n}{n^2}$

(د) $x_n = \frac{b^n}{n!}$

(هـ) $x_n = \frac{n!}{n^n}$

17. ⋆ إذا كانت $\lim \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$، فأثبت أن (x_n) محدودة، ثم أثبت أن نهايتها تساوي 1.

18. أثبت أن المتتالية $(\sin n)$ غير متقاربة. (إرشاد: افرض أن المتتالية متقاربة، وأوجد $\lim \cos 2n$ ثم لاحظ أن $(\sin 2n = \sin[(2n+2) - (2n)]$

19. أثبت أنه لكل $x \in \mathbb{R}$، توجد متتالية $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ و $x_n \to x$. كما يوجد متتالية $(y_n) \subset \mathbb{Q}^c$ و $y_n \to x$.

20. إذا كانت $x_n \to x$، فأثبت أن

$$a_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to x$$

هل العكس صحيح؟

21. إذا كانت $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وكانت $((-1)^n x_n)$ متقاربة، فأثبت أن (x_n) متقاربة، ثم أوجد نهايتها.

22. إذا كانت (x_n) تحقق

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

فأثبت أن (x_n) متقاربة.

23. إذا كانت (x_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة، وكان $c \in (0,1)$، بحيث

$$x_{n+1} < c x_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

فأثبت أن (x_n) متقاربة، وأوجد نهايتها. ثم بين هل المتتالية $(1 + \frac{1}{n})$ تحقق هذه الخاصية.

24. إذا كانت (x_n) متقاربة، فأثبت أنه لكل $k \in \mathbb{N}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0$$

هل العكس صحيح؟

3.3 المتتاليات المطردة

في هذا الفصل نركز اهتمامنا على المتتاليات المطردة (monotone sequences) . ومن أهم خصائصها أنها تكون متقاربة، أو أن نهايتها ∞ أو $-\infty$.

تعريف 3.5: المتتالية المطردة

1. نقول إن المتتالية (x_n) متزايدة (increasing) إذا كان $x_n \geq x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أما إذا كانت $x_{n+1} > x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإننا نقول إن (x_n) متزايدة فعلا (strictly increasing) .
2. نقول إن المتتالية (x_n) متناقصة (decreasing) إذا كان $x_{n+1} \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أما إذا كانت $x_{n+1} < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإننا نقول إن (x_n) متناقصة فعلا (strictly decreasing) .
3. إذا كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى مطردة (monotone) .

ملاحظة

المتتالية (x_n) متزايدة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(-x_n)$ متناقصة.

مثال 3.17.

1. المتتالية $(\frac{1}{n})$ متناقصة فعلا
2. المتتالية (n^2) متزايدة فعلا.
3. المتتالية $((-1)^n)$ ليست مطردة.
4. المتتالية $(\frac{(-1)^n}{n})$ ليست مطردة.

مثال 3.18.
نستطيع إثبات أن المتتالية (x_n) متناقصة فعلا بعدة طرق، حيث

$$x_n = \frac{2}{n+3}$$

1. البدء بشكل عكسي

$$x_{n+1} \overset{?}{<} x_n$$
$$\frac{2}{(n+1)+3} \overset{?}{<} \frac{2}{n+3}$$
$$n+3 < n+4$$

وبما أن المتباينة الأخيرة صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا المتتالية متناقصة فعلا.

2. إثبات أن $x_{n+1} - x_n < 0$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{(n+1)+3} - \frac{2}{n+3} = \frac{-2}{(n+4)(n+3)} < 0$$

3. إثبات أن $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2}{(n+1)+3}}{\frac{2}{n+3}} = \frac{n+3}{n+4} < 1$$

4. حساب المشتقة للدالة $f(x) = \frac{2}{x+3}$، وإثبات أنها سالبة في الفترة $[1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} < 0 \qquad \forall x \in [1, \infty)$$

تمرين 3.19. أثبت أن المتتالية (x_n) متناقصة فعلا، حيث

$$x_n = \frac{n}{n^2+1}$$

كقاعدة عامة، المتتالية المحدودة ليست بالضرورة متقاربة، فمثلا المتتالية $((-1)^n)$ محدودة، وغير متقاربة. لكن لو كانت مطردة ومحدودة فهي متقاربة كما توضح المبرهنة التالية.

مبرهنة 3.7: المتتاليات المطردة

إذا كانت (x_n) متتالية مطردة ومحدودة فهي متقاربة. كما أنه

1. إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة، فإن

$$\lim x_n = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ونكتب $x_n \uparrow \sup \{x_n\}$

2. إذا كانت (x_n) متناقصة ومحدودة، فإن

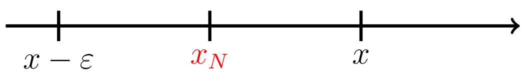
$$\lim x_n = \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ونكتب $x_n \downarrow \inf \{x_n\}$

البرهان

سنثبت صحة المبرهنة إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة. إن المجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير خالية ومحدودة من أعلى، ومن مسلمة التمام لها حد علوي أصغر وليكن $x = \sup A$. لإثبات أن $x_n \to x$، نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى، ومن تعريف $\sup A$، فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_N \in A$،

$$x - \varepsilon < x_N \leq x$$

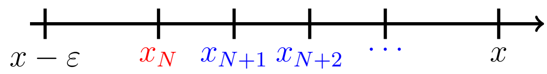


وبما أن

$$x_n \geq x_N \qquad \forall\, n \geq N$$

إذا

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \qquad \forall\, n \geq N$$



ونحصل على

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N$$

وهذا يعني أن $x_n \to x$. □

مثال 3.20.
إذا كانت $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 3$، فأثبت أن (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الحل
نبدأ بحساب بعض حدود المتتالية لمعرفة هل المتتالية مطردة أم لا.

$$x_1 = 0 < x_2 = 3 < x_3 = 4.5$$

هذا يعطي انطباعا أن المتتالية متزايدة، ويبقى إثبات أنها متزايدة. باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 0 < x_2 = 3$.
2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_{n+1} \geq x_n$، فإن

$$\frac{x_{n+1}}{2} + 3 \geq \frac{x_n}{2} + 3 \Rightarrow x_{n+2} \geq x_{n+1}$$

وهذا يعني أن المتتالية متزايدة.

يبقى إثبات أن المتتالية محدودة. باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

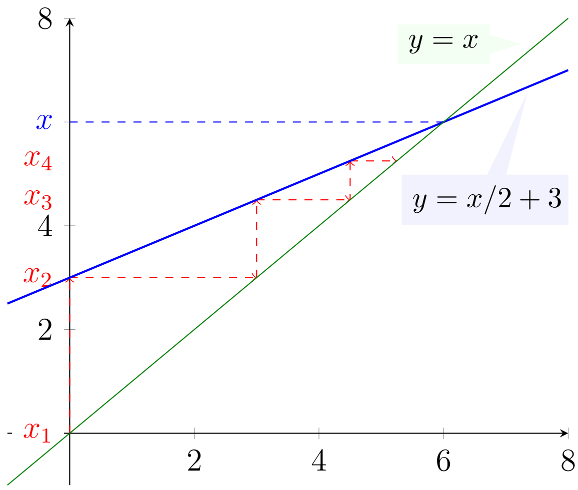
$$x_n \leq 6 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 0 < 6$.
2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_n \leq 6$، فإن

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 3 \leq \frac{6}{2} + 3 = 6$$

وهذا يعني أن المتتالية محدودة. إذا (x_n) متقاربة، ولإيجاد قيمة النهاية نفرض أن $x_n \to x$، إذا $x_{n+1} \to x$، وبأخذ النهاية للطرفين $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 3$، نحصل على

$$x = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$



تمرين 3.21.
ماذا لوكانت $x_1 = 10$؟

تمرين 3.22.
إذا كان $x_1 = 0,\ \ x_{n+1} = 2x_n + 3$ فهل المتتالية (x_n) متقاربة؟

مثال 3.23.
إذا كانت $x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ فأثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الحل
نبدأ بحساب بعض حدود المتتالية لمعرفة هل المتتالية مطردة أم لا.

$$x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{2} < x_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

هذا يعطي انبطاعا أن المتالية متزايدة ومحدودة
أولا: المتتالية متزايدة: باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{2}$.

2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_{n+1} \geq x_n$، فإن

$$2x_{n+1} \geq 2x_n \Rightarrow \sqrt{2x_{n+1}} \leq \sqrt{2x_n} \Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

وهذا يعني أن المتتالية متزايدة.

ثانيا: المتتالية محدودة: باستخدام الاستقراء الرياضي نثبت أن

$$x_n \leq 2 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1. التقرير صائب عندما $n = 1$ لأن $x_1 = 1 < 2$.

2. إذا كان التقرير صائبا عند n، أي $x_n \leq 2$، فإن

$$x_{n+1} = \leq \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2\cdot 2} = 2$$

وهذا يعني أن المتتالية محدودة. إذا (x_n) متقاربة، ولإيجاد قيمة النهاية نفرض أن $x_n \to x$، إذا $x_{n+1} \to x$، وبأخذ النهاية للطرفين $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$، نحصل على

$$x = \sqrt{2x} \Rightarrow x = 0, x = 2$$

وبما أن $x \geq x_1 = 1$، إذا $x = 2$.

مثال 3.24. سبق أن أثبتنا إنه إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن $\lim a^n = 0$. يمكن إثبات النهاية باستخدام مبرهنة المتتاليات المطردة. لتكن $x_n := a^n$، من الواضح أن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا (x_n) محدودة من أسفل. كما أن

$$x_{n+1} = aa^n < a^n = x_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

إذا (x_n) متناقصة، فهي متقاربة. لنفرض أن النهاية x، فنحصل على

$$x = \lim x_{n+1} = \lim a^{n+1} = \lim aa^n = ax$$

$$x = ax \ \Rightarrow\ x(1-a) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$$

مثال 3.25.
أثبت ان (x_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها، حيث $x_1 = 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

الحل
عند حساب بعض الحدودة نلاحظ أن المتتالية متناقصة بعد الحد الثاني

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{7}{4}, \quad x_4 = \frac{97}{56}$$

من الواضح أن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، إذا (x_n) محدودة من أسفل.
ولإثبات أن المتتالية متناقصة، نلاحظ أن

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$
$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 3 = 0$$

وهذا يعني أن x_n حل للمعادلة

$$t^2 - 2x_{n+1}t + 3 = 0$$

إذا المميز $4x_{n+1}^2 - 12$ غير سالب لأن لها حلا حقيقيا. أي إن

$$x_{n+1}^2 - 3 \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ثم نوجد

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n} - x_n \\ &= \frac{3}{2x_n} - \frac{x_n}{2} \\ &= \frac{3 - x_n^2}{2x_n} \\ &\leq 0 \qquad \forall\, n \geq 2 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المتتالية متناقصة من الحد الثاني.
لإيجاد قيمة النهاية، نفرض أن $x_n \to x$، إذا

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \\ 2x^2 &= x^2 + 3 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

وبما أن $x_n > 0$، إذا $x = \sqrt{3}$.
من الملاحظ أن كل حد من حدود المتتالية (x_n) هو عدد نسبي، ولكن نهاية المتتالية عدد غير نسبي.

الأعداد الحقيقية الممتدة (extended real numbers)

إن كلا من المتتاليتين (n) و $((-1)^n n)$ غير متقاربة. ولكن المتتالية الأولى تختلف عن الثانية أنها تتزايد بشكل مطرد وغير محدود، بينما الثانية فهي تتذبذب بين أعداد موجبة وسالبة كبيرة جدا. ومن المهم التفريق بينهما عند بحث النهاية. وهذا يتم من خلال إضافة الرمزين $-\infty$ و ∞ للاعداد الحقيقية.

تعريف 3.6: الأعداد الحقيقية الممتدة

تسمى المجموعة $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\} = \bar{\mathbb{R}}$ ، مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة.

عند اعتبار الأعداد الممتدة، فإننا سوف نتفق اصطلاحا على تعريف الحد العلوي الأصغر والحد السفلي الأكبر للمجموعات غير المحدودة.

1. إذا كانت A غير خالية وغير محدودة من أعلى، فإننا نكتب $\sup A = \infty$
2. إذا كانت A غير خالية ومحدودة من أسفل، فإننا نكتب $\inf A = -\infty$
3. بما أن أي عدد حقيقي هو حد علوي للمجموعة ϕ، فإن $\sup \phi = -\infty$، كما أن $\inf \phi = \infty$.

نقول إن G جوار للنقطة ∞ إذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث $(M, \infty] \subset G$.

تعريف 3.7:

إذا كانت (x_n)متتالية، فإننا نقول إن (x_n) تتباعد إلى ∞، ونكتب

$$\lim x_n = \infty$$

إذا كان لكل $M \in \mathbb{R}^+$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n > M \qquad \forall\ n \geq N$$

ونقول إن (x_n) تتباعد إلى $-\infty$، ونكتب $\lim x_n = -\infty$، إذا كان لكل $M \in \mathbb{R}^+$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n < -M \qquad \forall\ n \geq N$$

إذا كانت (x_n) متتالية متزايدة وغير محدودة من أعلى، فإن

$$x_n \to \infty$$

مثال 3.26.
إذا كانت

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

فإن (x_n) متزايدة وغير محدودة. لإثبات أن المتتالية متزايدة، نلاحظ أن

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$$

ولإثبات أنها غير محدودة، نلاحظ أن

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

وبشكل عام فإن

$$x_{2^n} > 1 + \left(\frac{n}{2}\right)$$

وهذا يقتضي أن (x_n) غير محدودة. وبالتالي $\lim x_n = \infty$.

ملاحظات

1. إذا كانت المتتالية غير محدودة، فليس بالضرورة أن $\lim x_n = \infty$ ، فمثلا المتتالية (x_n) المعرفة بالعلاقة

$$x_n := \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

نهايتها غير موجودة في $\bar{\mathbb{R}}$.

2. قد تكون المتتالية متباعدة إلى ∞ ولكنها ليست مطردة. مثلا إذا كانت $(x_n) = (n(2 + (-1)^n))$، فإن $x_n \to \infty$، لأن $x_n \geq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

3.2 تمارين

1. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة حيث

   (ا) $x_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

   (ب) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

   (ج) $x_n = \frac{n^n}{n!}$

   (د) $x_n = \sqrt[n]{a},\ a > 1$

   (ه) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

2. حدد هل المتتالية (x_n) مطردة، أم لا.

   (ا) $x_n = \cos n$

   (ب) $x_n = n^3 - 3n + 3$

   (ج) $x_n = \dfrac{1-n}{2+n}$

3. أثبت أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم أوجد نهايتها.

   (ا) ⋆⋆ $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$

   (ب) ⋆ $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{4x_n+2}{x_n+3}$

   (ج) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n+3}$

   (د) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$

   (ه) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3-x_n}$

4. إذا كانت $x_1 = a > 0$، وعرفنا المتتالية (x_n) كما يلي:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

   فهل المتتالية متقاربة أم متباعدة؟

5. إذا كان $0 < x_1 < 1$ وكان $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن x_n متناقصة، وأوجد نهايتها. ثم بين أن $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$

6. أثبت أن المتتالية (x_n) متزايدة، وغير محدودة حيث $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. ⋆ إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$، فأثبت أن (x_n) متناقصة ومحدودة وبالتالي متقاربة.

8. إذا كان $0 < b < 1$ وكانت $x_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n$، فأثبت أن (x_n) متزايدة ومحدودة ثم أوجد نهايتها.

9. إذا كانت $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$، فأثبت أن (x_n) متزايدة ومحدودة وبالتالي متقاربة.
(إرشاد: إذا كان $k \geq 2$، فإن $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.)

10. إذا كان $0 < x_1 < y_1$، وعرفنا المتتاليتين (x_n) و (y_n) كما يلي:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},$$
$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(ا) أثبت أن $0 < x_n < y_n$ لكل $n \in N$.
(ب) أثبت أن x_n متزايدة ومحدودة من أعلى، و y_n متناقصة ومحدودة من أسفل.
(ج) أثبت أن $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < (y_1 - x_1)/2^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
(د) أثبت أن $\lim x_n = \lim y_n$.

11. ⋆ إذا عرفنا

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$$

فأثبت أن (x_n) متقاربة. ثم أثبت أن $((2n+1)x_n^2)$ متقاربة، وأوجد $\lim x_n$.

12. وضح أن المتتالية $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$ متباعدة إلى ∞.

13. إذا كانت $x_n \to \infty$ و (y_n) متقاربة، فأثبت أن $x_n + y_n \to \infty$.

14. إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتان موجبتان، وكان

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = L > 0$$

فأثبت أن $x_n \to \infty$ إذا وفقط إذا كان $y_n \to \infty$.

15. إذا كان $\lim x_n/n = L > 0$، فأثبت أن $\lim x_n = \infty$.

16. إذا كانت $x_n \to \infty$ و (y_n) محدودة، فهل بالضرورة $x_n + y_n \to \infty$.

17. إذا كانت (x_n) متتالية متزايدة، و (y_n) متتالية متناقصة بحيث $x_n \leq y_n$، فأثبت أن المتتاليتين (x_n) و (y_n) متقاربتان. ثم أثبت أنه إذا كان $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$، فإن $\lim x_n = \lim y_n$.

3.4 المتتاليات الجزئية ونظرية بولزانو-فايرشتراس

في هذا الفصل نقدم مفهوم المتتاليات الجزئية. وتعتبر أكثر عمومية من ذيل المتتالية الذين ناقشناه سابقا. وتفيد المتتاليات الجزئية في إثبات تقارب أو تباعد المتتالية. ثم نثبت مبرهنة بولزانو-فايرشتراس أن أي متتالية محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.

تعريف 3.8: المتتالية الجزئية

لتكن (x_n) متتالية، و (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلا، أي $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ، فإننا نسمي المتتالية $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots) = (x_{n_k})$ متتالية جزئية من (x_n) .

وهذا يعني أن المتتالية الجزئية ناتجة عن بعض عناصر المتتالية الأصلية وإعادة ترقيم الحدود الباقية بدون الإخلال بالترتيب السابق.

مثال 3.27. 1. كل ذيل من (x_n) هو متتالية جزئية.

2. المتتالية $(1, 4, 7, 10, \dots, 3n-2, \dots)$ تمثل متتالية جزئية من المتتالية (n).

3. الحدود الفردية تشكل متتالية جزئية من (x_n) حيث $n_k = 2k-1$ ، وكذلك الحدود الزوجية.

4. $(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots)$ ليست متتالية جزئية من $(\frac{1}{n})$ لاختلاف الترتيب.

5. $(4, 8, 9, \dots)$ ليست متتالية جزئية من $(2n)$ ، لأن 9 ليس عنصرا في المتتالية.

ملاحظات

1. إذا كانت المتتالية (x_{n_k}) متقاربة، فإن نهايتها تسمى نهاية جزئية (subsequential limit) . فمثلا -1 و 1 نهايتان جزئيتان للمتتالية $((-1)^n)$.

2. الشرط $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ يقتضي أن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

النظرية التالية توضح أن المتتالية الجزئية لمتتالية متقاربة، هي أيضا متقاربة ولنفس النهاية.

مبرهنة 3.8:

إذا كانت (x_n) متقاربة ونهايتها x، فإن كل متتالية جزئية منها (x_{n_k}) متقاربة لنفس النهاية.

البرهان

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

وبما أن $n_k \geq k$، لكل $k \in \mathbb{N}$، إذا

$$k \geq N \;\Rightarrow\; n_k \geq N \;\Rightarrow\; |x_{n_k} - x| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x_{n_k} \to x$. □

ملاحظات

1. إذا أمكن إيجاد متتاليتين جزئيتين (x_{m_n}) و (x_{k_n}) متقاربتين لنهايتين مختلفتين، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.

2. إذا أوجدنا متتالية جزئية (x_{n_k}) غير متقاربة، فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة.

مثال 3.28.

1. المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة. لإثبات ذلك لنعرف $x_n = (-1)^n$، ونلاحظ أن

$$x_{2n-1} \to -1, \quad x_{2n} \to 1$$

وبما أن النهايتين مختلفتان، إذا النهاية غير موجودة.

2. إذا عرفنا

$$x_n := \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

فإن (x_n) ليست متقاربة، لأن المتتالية الجزئية x_{2n-1} غير متقاربة.

تمرين 3.29. أثبت أن المتتالية $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ ليست متقاربة.

مثال 3.30.
سبق أن أثبتنا أنه إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن

$$\lim a^n = 0$$

وذلك باستخدام طريقة الحصر. الآن نوضح طريقة أخرى للإثبات باستخدام المتتاليات الجزئية.
لتكن $x_n := a^n$. من الواضح أن المتتالية (x_n) متناقصة فعلا ومحدودة من أسفل بالعدد 0، وبالتالي فإنها متقاربة لعدد، وليكن x. إذا $x_n \to x$، كما أن المتتالية الجزئية (x_{2n}) متقاربة. ولكن

$$x_{2n} = a^{2n} = (a^n)^2 = (x_n)^2$$

إذا

$$x_{2n} \to x^2$$

وبما أن النهاية وحيدة، فإن $x = x^2$ وهذا يعني أن $x = 0$ أو $x = 1$، ولكن بما أن (x_n) متناقصة فعلا، ومحدودة من أعلى بالعدد $a < 1$، إذا $x = 0$.

نتيجة 3.1:

إذا كانت (x_n) متقاربة ، ولها متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من x ، فإن $\lim x_n = x$.

البرهان
لتكن $x_n \to y$، وبما أن (x_{n_k}) متتالية جزئية، إذا $x_{n_k} \to y$، ولكن النهاية وحيدة، إذا $x = y$. □

مبرهنة 3.9: المتتالية الجزئية المطردة

إذا كانت (x_n) متتالية، فإن لها متتالية جزئية مطردة.

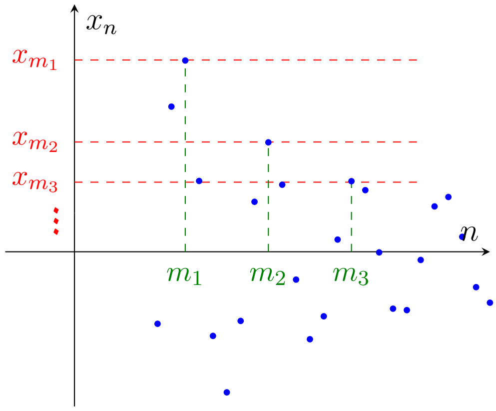
البرهان
نقول إن x_m نقطة قمة إذا كانت أكبر من أو تساوي جميع الحدود التي تليها، أي

$$x_m \geq x_n \qquad \forall\, n \geq m$$

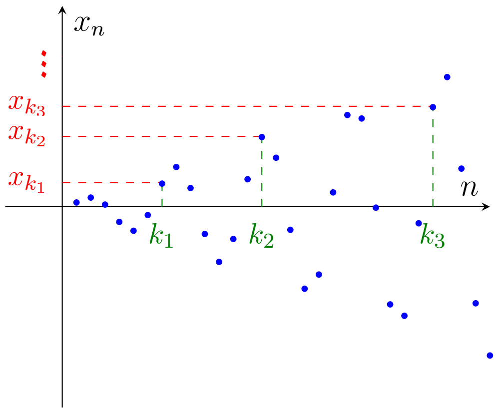
ويوجد حالتان بخصوص عدد نقاط القمة:

1. إذا كان هناك عدد لا نهائي من نقاط القمة فإننا نحصل على المتتالية الجزئية المتناقصة (x_{m_n})

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \dots$$



2. إذا كان هناك عدد منته من نقاط القمة (قد لا يكون هناك أي نقطة قمة)، ولتكن $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_r}$. نعرف المتتالية (x_{k_n}) كما يلي: $k_1 = m_r + 1$، وهو أول حد بعد القمة الأخيرة. وبما أن x_{k_1} ليست نقطة قمة، إذا يوجد $k_2 > k_1$ بحيث $x_{k_2} > x_{k_1}$، وبما أن x_{k_2} ليست نقطة قمة، إذا يوجد $k_3 > k_2$ بحيث $x_{k_3} > x_{k_2}$. فنحصل على المتتالية الجزئية المتزايدة (x_{k_n}).



□

المبرهنة التالية تعطي شرطا كافيا لضمان أن المتتالية تحتوي متتالية جزئية متقاربة، وتعتبر من المبرهنات المهمة في التحليل الحقيقي كما سنلاحظ في الفصول القادمة.

مبرهنة 3.10: مبرهنة بولزانو-فايرشتراس

إذا كانت (x_n) متتالية محدودة ، فإن لها متتالية جزئية متقاربة.

البرهان

من المبرهنة السابقة، يوجد متتالية جزئية مطردة (x_{n_k})، وبما أن (x_n) محدودة، إذا (x_{n_k}) محدودة، وبالتالي متقاربة. □

المبرهنة التالية تعطي العلاقة بين المتتاليات الجزئية المتقاربة، وتقارب المتتالية المحدودة.

مبرهنة 3.11:

إذا كانت (x_n) محدودة ، وجميع متتالياتها الجزئية المتقاربة متقاربة إلى نفس النهاية، فإن x_n متقاربة إلى هذه النهاية.

البرهان

بما أن (x_n) محدودة، إذا يوجد متتالية جزئية متقاربة ولتكن نهايتها x. لنفرض أن x_n ليست متقاربة إلى x. هذا يعني وجود $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n \geq N$ تحقق

$$|x_n - x| \geq \varepsilon$$

نختار $N = 1$، عندئذ يوجد n_1 بحيث $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon$. ثم نختار $N = n_1 + 1$، فنستطيع أن نجد n_2 بحيث $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon$، وبالاستمرار، نحصل على المتتالية (x_{n_k}) بحيث

$$|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

المتتالية (x_{n_k}) محدودة، وبالتالي لها متتالية جزئية $(x_{n_{k_j}})$ متقاربة. وبما أن $(x_{n_{k_j}})$ متتالية جزئية من (x_n)، فإن $x_{n_{k_j}} \to x$، وهذا تناقض مع

$$|x_{n_{k_j}} - x| \geq \varepsilon \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

إذا $x_n \to x$ □

تمارين 3.3

1. أعط مثالا لما يلي:

   (ا) ⋆ متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة

   (ب) متتالية غير محدودة لها متتالية جزئية متقاربة

2. إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة إلى 0، فأثبت ان $\lim x_n = 0$.

3. إذا كانت (x_n) متتالية، وكانت متتالياتاها الجزئيتان (x_{2n}), (x_{2n-1}), متقاربة إلى x، فأثبت أن $x_n \to x$).

4. إذا كانت (x_n) غير محدودة، فأثبت أنه يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) بحيث $\lim \frac{1}{x_{n_k}} = 0$.

5. إذا كانت (x_n) متتالية، وكانت متتالياتها الجزئية (x_{2n}), (x_{2n-1}), (x_{3n}) متقاربة، فأثبت أن (x_n) متقاربة.

6. إذا كانت (x_n) متزايدة ولها متتالية جزئية محدودة من أعلى، فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة.

7. أثبت أن المتتالية (x_n) لها متتالية جزئية متقاربة حيث

$$x_n = \frac{(n^2 + 20n + 30)\sin(n^3)}{n^2 + n + 1}$$

8. إذا كانت (x_n) غير محدودة من أعلى، فأثبت أن لها متتالية جزئية متباعدة إلى ∞.

9. إذا كانت $a > 0$، واخترنا $x_1 > \sqrt{a}$، وعرفنا

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}$$

   فأثبت أن (x_{2n-1}) متزايدة، و (x_{2n}) متناقصة، ثم أثبت ان (x_n) متقاربة وأوجد نهايتها.

   (إرشاد: لاحظ أن $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a - x_n^2}{x_n + 1}$).

3.5 متتالية كوشي

تعرفنا في الفصول السابقة على المتتاليات المتقاربة. والتي نحتاج لمعرفة نهايتها حتى يتسنى لنا إثبات تقاربها باستخدام التعريف. بعد ذلك ناقشنا نوعا خاصا من المتتاليات وهي المتتاليات المطردة والمحدودة. حيث نعلم أنها متقاربة، بدون معرفة النهاية. ولكن هذا النوع من المتتاليات يعتبر حالة خاصة، ونحن بحاجة لمعيار يستطيع الحكم على تقارب أي متتالية بدون معرفة نهايتها، وهذا ما نفصله في هذا الفصل.

تعريف 3.9: متتالية كوشي (Cauchy sequence)

تسمى المتتالية (x_n) متتالية كوشي، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq N$$

وهذا يعني أن الحدود المتأخرة للمتتالية قريبة من بعضها.

مثال 3.31.
أثبت أن $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ متتالية كوشي.

الحل
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى،

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

ومن خاصية أرخميدس يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$، بحيث $\frac{\varepsilon}{2} < \dfrac{1}{N}$. إذا كان $m, n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

حتى نثبت أن متتالية هي متتالية كوشي، لا يكفي أن نثبت أن كل حد قريب من الحد الذي يليه. بل ينبغي أن تكون جميع الحدود بعد حد معين قريبة من بعضها.

مثال 3.32. هل المتتالية $(\sqrt{n})$ متتالية كوشي؟

الحل
لو أخذنا الحدود المتتالية، وكان $\varepsilon > 0$ معطى، فإننا نلاحظ أن

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &\leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

ومن خاصية أرخميدس يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$، إذا

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \forall\, n \geq N \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ولكن المتتالية ليست كوشي، ويمكن إثبات ذلك بملاحظة أن

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \sqrt{2n} - \sqrt{n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}} \\ &> \frac{n}{2\sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{n}}{4} \\ &\geq 1 \qquad \forall\, n \geq 16 \end{aligned}$$

إذا لو اخترنا $\varepsilon = \frac{1}{2}$، فإن

$$|x_{2n} - x_n| > \varepsilon \qquad \forall\, n \geq 16$$

وبالتالي المتتالية ليست كوشي.

تمرين 11 : أثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي حيث

$$x_n = \frac{2n}{3n+1}$$

مبرهنة 3.12

إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة، فهي من نوع كوشي.

البرهان

لتكن $x_n \to x$، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, n \geq N$$

الآن، إذا كان $n, m \geq N$، فإن

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

إذا (x_n) من نوع كوشي. $\square$

تمهيدية 3.1

إذا كانت (x_n) من نوع كوشي، فإنها محدودة.

البرهان
لتكن (x_n) من نوع كوشي. نختار $\varepsilon_0 = 1$، فيمكن أن نجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \forall\, n, m \geq N$$

نختار $m = N$، ونحصل على

$$|x_n - x_N| < 1 \qquad \forall\, n \geq N$$

ولكن

$$|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N| < 1 \;\Rightarrow\; |x_n| < |x_N| + 1 \qquad \forall\, n \geq N$$

نختار

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$$

ونجد أن

$$|x_n| \leq K \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

□

أثبتنا في مبرهنة 3.12 أن أي متتالية متقاربة فهي من نوع كوشي. لكن هل العكس صحيح؟ الإجابة نعم، كما توضحه المبرهنة التالية.

مبرهنة 3.13: معياركوشي

المتتالية (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت من نوع كوشي.

البرهان
أثبتنا سابقا أن أي متتالية متقاربة، فهي من نوع كوشي.
لنفرض أن (x_n) متتالية كوشي، إذا فهي محدودة. ومن مبرهنة بولزانو-فايرشتراس، فإنه يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة إلى x. الآن نثبت أن $x_n \to x$.
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى. بما أن (x_n) متتالية كوشي، إذا يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq N_1$$

وبما أن المتتالية الجزئية (x_{n_k}) متقاربة إلى x، إذا يوجد عدد $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq N_2$$

نختار عددا ثابتا $N_k \geq N = \max\{N_1, N_2\}$، وبالتالي

$$|x_{N_k} - x| < \varepsilon$$

كما أن

$$|x_{N_k} - x_n| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

إذا لكل $n \geq N$، فإن

$$\begin{aligned}|x_n - x| &\leq |x_n - x_{N_k}| + |x_{N_k} - x| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

إذا $x_n \to x$. □

مثال 3.33.

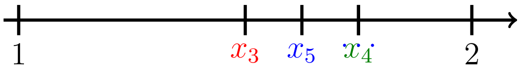
إذا كان $x_1 = 1, x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة.

الحل

بحساب أول ثلاثة حدود في المتتالية $x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = \frac{7}{4},\ x_5 = \frac{13}{8}$، نلاحظ أن المتتالية ليست مطردة.



الآن نوجد حاصل طرح حدين متتاليين في هذه المتتالية.

$$\begin{aligned}x_n - x_{n+1} &= \frac{-1}{2}(x_{n-1} - x_n) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(x_1 - x_2) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

إذا كانت $n < m$، فإن

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\ &< \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n} < \frac{4}{n}\end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon > 0$، فإنه من خاصية أرخميدس يوجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$. الآن إذا كان $n, m \geq N$، فإن

$$|x_n - x_m| < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{N} < 4\varepsilon$$

إذا (x_n) متقاربة. ويمكن إيجاد قيمة النهاية x كما يلي:

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_1 &= (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_2 - x_1) \\ x_{n+1} - 1 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} + \ldots + \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 \\ x_{n+1} &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]\end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\lim x_n = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

مثال 3.34. المتتالية (x_n) حيث
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$
ليست متتالية كوشي. يمكن إثبات ذلك باختيار $m = 2n$.

$$\begin{aligned}|x_{2n} - x_n| &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &= n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

وهذا يقتضي أن (x_n) ليست متتالية كوشي.

تمارين 3.4

1. $\star\star$ أثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي
$$x_n = \frac{5n}{n+3}$$

2. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق
$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$$
فأثبت أن (x_n) متتالية كوشي.

3. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق
$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{2n^2 - 1}{5n^2 + 4}$$
فهل (x_n) بالضرورة متتالية كوشي؟

4. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق
$$|x_n| < \frac{2n^2 - 3}{3n^3 + n + 1}$$
فأثبت أن (x_n) متتالية كوشي.

5. إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتاليتان من نوع كوشي، فأثبت أن $(x_n + y_n)$ من نوع كوشي.

6. $\star$ أثبت أن المتتالية $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ من نوع كوشي.

7. إذا كانت (x_n) متتالية تحقق
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|x_{n+1} - x_n|$$
فأثبت أن (x_n) متتالية كوشي.

8. أثبت أن (x_n) متتالية كوشي حيث $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

9. $\star$ إذا كانت $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$، فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0$.

10. إذا كانت $x_1 = 0, x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 2x_{n-2}}{3}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

أثبت أن (x_n) متقاربة، وأوجد نهايتها.