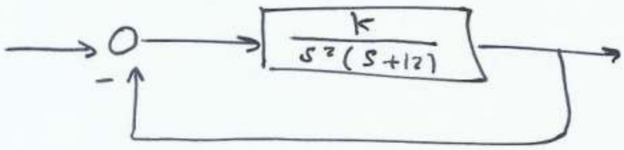
Steady State Error Examples
CH #4

Example $\boxed{1}$



أول شي نتأكد من stability ، نحولها إلى بلوكة مختصرة

$$\longrightarrow \boxed{\dfrac{\frac{k}{s^2(s+12)}}{1+\frac{k}{s^2(s+12)}}} \longrightarrow \quad \equiv \quad \longrightarrow \boxed{\frac{k}{s^2(s+12)+k}} \longrightarrow$$

charactristic equation: $s^2(s+12)+k=0$

$$\Rightarrow s^3+12s^2+k=0$$

s^3	1	0
s^2	12	k
s^1	$\frac{-k}{12}$	
s	k	

شرط stability أن العمود الأول

لا تتغير فيه الإشارة .

وعشان ما تتغير الإشارة لابد

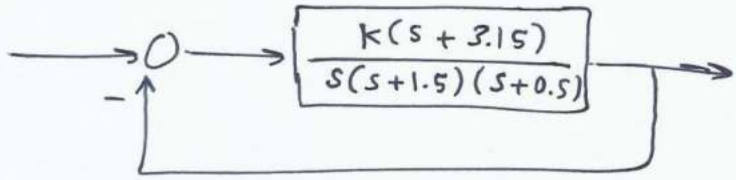
أنه : $\frac{-k}{12}>0$

مستحيل $\Leftarrow -k>0$

$\therefore$ not stable for any (k)

إذن نتوقف عن الحل .

Example $\boxed{2}$



أولاً نتأكد من Stability كما تعلمت في شابتر 3 و 4.

بعد تطبيق Routh array نجد أن :

stable if $0 < K < 1.304$

الآن نوجد قيم K_p ، K_v ، K_a :

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)} = \frac{K(0+3.15)}{0(0+1.5)(0+0.5)}$$

$$= \infty$$

$\Rightarrow$ step error : $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \frac{R}{1+\infty} = \boxed{0}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \times \frac{K(s+3.15)}{\cancel{s}(s+1.5)(s+0.5)} = \frac{K(0+3.15)}{(0+1.5)(0+0.5)}$$

$$= 4.2K$$

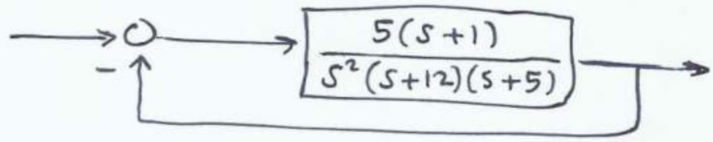
$\Rightarrow$ ramp error : $e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \boxed{\frac{R}{4.2K}}$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \times \frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)} = 0 \times \frac{K(0+3.15)}{(0+1.5)(0+0.5)}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Parabolic error : $e_{ss} = \frac{R}{K_a} = \frac{R}{0} = \boxed{\infty}$

Example 3



أول شي نتأكد من Stability .....

الآن بعد ما تأكدنا عن طريق Routh ، نوجد k_p ، k_v ، k_a

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{5(0+1)}{0^2(0+12)(0+5)} = \infty$$

$\Rightarrow$ step error: $$e_{ss} = \frac{R}{1+k_p} = \frac{R}{1+\infty} = \boxed{0}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = s \times \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)} = \frac{5(0+1)}{0(0+12)(0+5)} = \infty$$

$\Rightarrow$ ramp error: $$e_{ss} = \frac{R}{k_v} = \frac{R}{\infty} = \boxed{0}$$

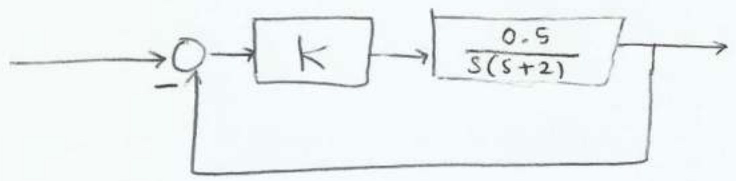
$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \times \frac{5(s+1)}{\cancel{s^2}(s+12)(s+5)} = \frac{5(0+1)}{(0+12)(0+5)}$$

$$= \frac{1}{12}$$

$\Rightarrow$ parabolic error: $$e_{ss} = \frac{R}{k_a} = \frac{R}{\frac{1}{12}} = \boxed{12R}$$

Time Response Examples
CH #5

Exercise 1



نختصرها إلى بلوكة واحدة :

$$\frac{\frac{K0.5}{S(S+2)}}{1+\frac{K0.5}{S(S+2)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{0.5K}{S^2+2S+0.5K}}$$

نلاحظ أنها على الصورة العامة لـ Second order

$$\Rightarrow 2\zeta\omega_n = 2$$
$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{0.5K}$$

المطلوب هو:

Design the(K) such that P.O. is 5% ?

$$P.O.\ 5\% \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$\because \zeta = \cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

نعوض في $2\zeta\omega_n = 2$:

$$2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \omega_n = 2$$
$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{2}}$$

نعوض في $\omega_n = \sqrt{0.5K}$:

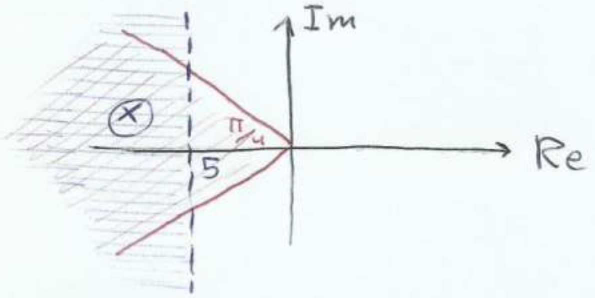
$$\sqrt{2} = \sqrt{0.5K} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 4}$$

Exercise 2 :

ⓐ P.O. at most 5% and $T_s(2\%)$ at most 0.8 sec

① $P.O. < 5\% \Rightarrow \boxed{P.O. < \frac{\pi}{4}}$

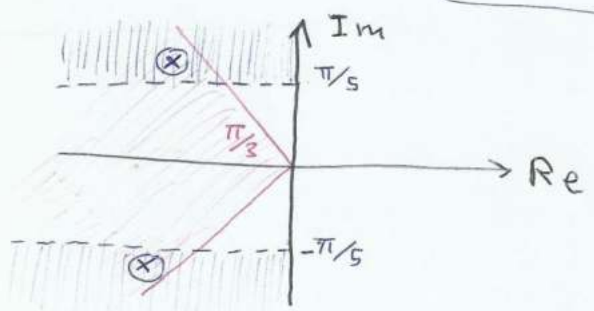
② $T_s\ 2\% < 0.8 \Rightarrow \frac{4}{\xi \omega_n} < 0.8 \Rightarrow \boxed{\xi \omega_n > 5}$



ⓑ P.O. at most 16% and T_p at most 5 sec

① $P.O. < 16\% \Rightarrow \boxed{P.O. < \frac{\pi}{3}}$

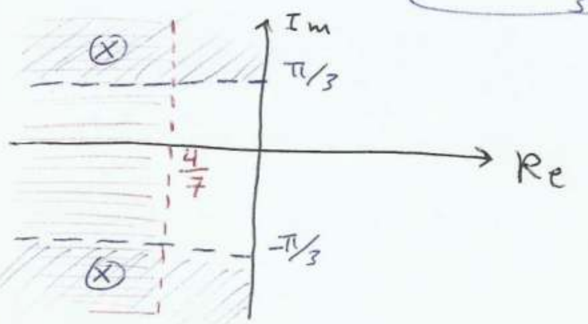
② $T_p < 5 \Rightarrow \frac{\pi}{\omega_d} < 5 \Rightarrow \boxed{\omega_d > \frac{\pi}{5}}$



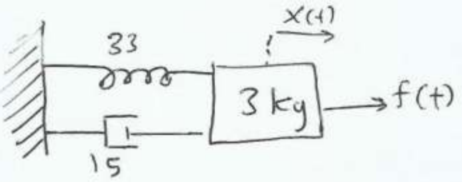
ⓒ T_s 2% at most 7 sec and T_p at most 3 sec

① $T_s\ 2\% < 7 \Rightarrow \frac{4}{\xi \omega_n} < 7 \Rightarrow \boxed{\xi \omega_n > \frac{4}{7}}$

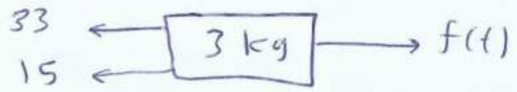
② $T_p < 3 \Rightarrow \frac{\pi}{\omega_d} < 3 \Rightarrow \boxed{\omega_d > \frac{\pi}{3}}$



Exercise 3



في هذا المثال رجعك إلى ال modelling



※ Find transfer function from X(s) to F(s) ?

$\Sigma F = ma$

$f(t) - 33x - 15\frac{dx}{dt} = 3\frac{d^2x}{dt^2}$

$\mathcal{L} \Rightarrow F(s) - 33X(s) - 15\,S\,X(s) = 3S^2 X(s)$

$\Rightarrow X(s)\left[3S^2 + 15S + 33\right] = F(s)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{F(s)}{X(s)} = \frac{1}{3S^2 + 15S + 33}}$

※ Find DC gain , ξ , ω_n , $T_s\,2\%$, T_p and P.O. ?

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{S^2 + \cancel{1}5S + 11}$: أخذنا عامل مشترك للمقام : حولها على الصورة العامة

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{33} \times \frac{11}{S^2 + 5S + 11}}$: ضربنا بـ 11 وقسمنا على 11 :

① $\text{DC gain} = G(0) = \frac{1}{33} \times \frac{11}{0^2 + 5(0) + 11} = \boxed{\frac{1}{33}}$

② $2\xi\omega_n = 5$, $\boxed{\omega_n = \sqrt{11}}$

$\Rightarrow 2 \times \xi \times \sqrt{11} = 5 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{5}{2\sqrt{11}}}$

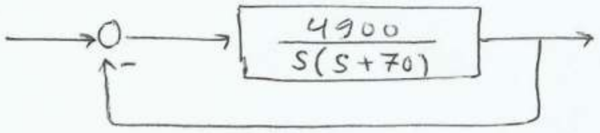
③ $T_s\,2\% = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\frac{5}{2\sqrt{11}} \times \sqrt{11}} = \boxed{1.6}$

④ $T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{11} \times \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2\sqrt{11}}\right)^2}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{19}}}$

⑤ $P.O. = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \boxed{2.72}$ بعد التعويض

Exercise 4

هذا المثال شبيه بأسئلة الإختبار ...



Find: (a) Stability ?

نختصرها إلى بلوكة واحدة :

$$\frac{\frac{4900}{S(S+70)}}{1+\frac{4900}{S(S+70)}} = \frac{\frac{4900}{S(S+70)}}{\frac{S(S+70)+4900}{S(S+70)}} = \frac{4900}{S^2+70S+4900}$$

charactristic equation $S^2+70S+4900=0$

$$\begin{array}{c|cc} S^2 & 1 & 4900 \\ S^1 & 70 & \\ S^0 & 4900 & \end{array}$$

no sign change $\Rightarrow$ Stable

(b) 2% settling time :

$$2\zeta\omega_n = 70 \Rightarrow \zeta\omega_n = \frac{70}{2} = 35$$

$$T_s\,2\% = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{35} = \boxed{0.11}$$

(c) steady state error for $5\,u(t)$:

Step input $\Rightarrow K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4900}{S(S+70)} = \frac{4900}{0(0+70)} = \infty$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \frac{5}{1+\infty} = \boxed{0}$$

(d) steady state error for $5t\,u(t)$:

ramp input $\Rightarrow K_v = \lim_{s\to 0} SG(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{S} \times \frac{4900}{\cancel{S}(S+70)} = \frac{4900}{0+70} = 70$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \frac{5}{70} = \boxed{\frac{1}{14}}$$

(e) steady state error for $5t^2\,u(t)$:

Parabolic input $\Rightarrow K_a = \lim_{s\to 0} S^2 G(s) = \lim_{s\to 0} S^2 \times \frac{4900}{S(S+70)} = 0$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{K_a} = \frac{5}{0} = \boxed{\infty}$$

Exercise 5 :

فكرة هذا المثال أنه في حالة ال Overdamped رح تكون ال poles كلها على المحور الأفقي ، واحدة قريبة جدًا من المحور العامودي والأخرى جدًا بعيدة .

فنقدر نهمل ال pole البعيد و نحول إلى First-order system .

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 101s + 100}$$

نلاحظ أن : $2\zeta\omega_n = 101 \ , \ \omega_n = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow 2\zeta 10 = 101 \Rightarrow \boxed{\zeta = 5.05}$

لو حلينا المقام بالآلة نجد أن : $s = 1 \ , \ 100$

نعمل Partial fraction expantion : $\dfrac{100}{s^2+101s+100} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+100}$

لو قارنا $\dfrac{B}{s+100}$ بالصورة العامة لل First-order $\dfrac{k}{Ts+1}$ نجد أن :

$$\frac{\frac{B}{100}}{\frac{1}{100}s+1} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{100} = 0.01}$$

ولو قارنا $\dfrac{A}{s+1}$ بالصورة العامة نجد أن $\boxed{T = 1}$

السيستم رح يعتمد على الأبطأ ، وهو $\dfrac{A}{s+1}$ لأن T تبعو أكبر

نحسب قيمة A و B كما تعلمنا في الشبتر الأول ، نجد أن $A = 1$

$$\therefore \frac{100}{s^2+101s+100} \approx \boxed{\frac{1}{s+1}}$$

* Steady state value : $G(0) = \dfrac{1}{0+1} = \boxed{1}$
* 2% settling time : $T_{s\,2\%} = 4T = 4 \times 1 = \boxed{4}$
* Percent overshoot :

لا يوجد لأنه Overdamped

ومثل هذا السؤال مستبعد أنه يجي في الإختبار

لكن ذاكره احتياطًا .

Exercise 6

فكرة هنا المثال أنه أعطاك third-order system

نعمل نفس اللي عملناه في المثال السابق ، نعمل Partial fraction expansion

ونحسب الـ Time constant لكل سيستم ، ونهمل الأقل قيمة للـ T

عشان حيكون أسرع .

$$G(s) = \frac{8}{(s+2.5)(s^2+2s+4)} = \frac{1.524}{s+2.5} + \frac{-1.524s+0.762}{s^2+2s+4}$$

نقارن $\frac{1.524}{s+2.5}$ بالصورة العامة $\frac{K}{Ts+1}$:

$$\Rightarrow \frac{\frac{1.524}{2.5}}{\frac{1}{2.5}s+1} \quad \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2.5} = 0.4}$$

نقارن $\frac{-1.524s+0.762}{s^2+2s+4}$ بالصورة العامة $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$:

$$\Rightarrow (-1.524s+0.762)\times\frac{1}{4}\left[\frac{4}{s^2+2s+4}\right]$$

$$\Rightarrow 2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta\omega_n = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{1} = 1}$$

إذن ، نهمل $\frac{1.524}{s+2.5}$.

$$\Rightarrow \frac{8}{(s+2.5)(s^2+2s+4)} \approx \frac{-1.524s+0.762}{s^2+2s+4}$$

$$T_s\,2\% = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$$

$$\zeta = 0.5 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0.5) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{P.O. = 16\%}$$

وهنا المثال أيضًا مستبعد .