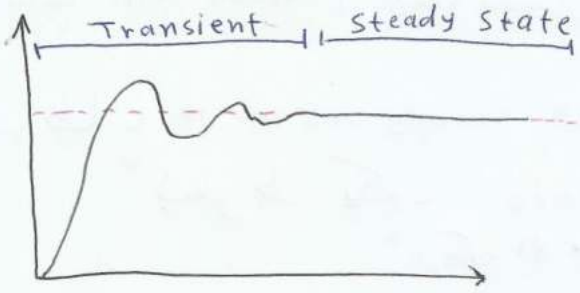
عندنا نوعين من Time response :

① Transient response [عبارة عن معادلة في e^t]

② steady state response [عبارة عن عدد ثابت Constant]

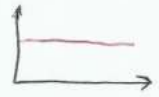


يعني مثلاً لو عندي هذي المعادلة : $y(t)=3-3e^{-t}$

steady state ← 3 ، $3e^{-t}$ ← Transient

وعشان نجيب Time response لأي System لازم

أستخدم Test input ، وهي ثلاثة أنواع :

① step  ② ramp ③ parabolic

و المستخدم فقط في هذا المنهج هو الـ step response ↖

أحياناً يعطيك Transfer function ويطلب منك Impulse response

ورح أتكلم عنها لاحقاً ...

Ahmed Alsharani

※ أولاً: steady state response :

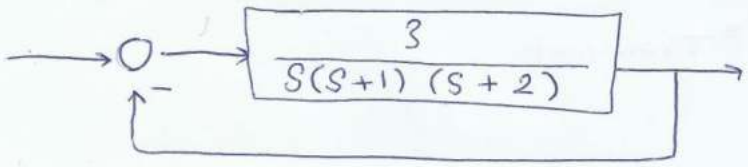
لو وردت كلمة (DC gain) أو (final value) أو (steady state value) كلها نفس المعنى .

لو طلب الـ steady state value فقط تعوض مكان كل (S) بصفر

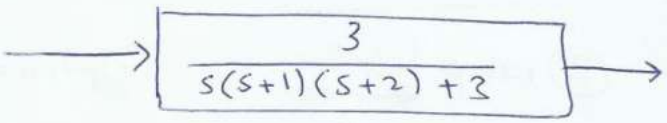
"بشرط يكون Stable والمعادلة open loop

ويكون إلا نبوت "step"

Example: Find the steady state value :



① نحولها إلى بلوكة واحدة :



② نتأكد إنها Stable عن طريق Routh array ✓

③ الآن نعوض مكان كل (S) بصفر :

$$\frac{3}{0(0+1)(0+2)+3} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

Steady state value = 1

Ahmed Alsharani

ثانياً: Transient response ✳

عندي نوعين من الـ systems :

1. first-order system
2. second-order system

بالنسبة للأول يعني عندي المقام من الدرجة الأولى .

الصورة العامة للـ first-order : $\frac{K}{Ts+1}$

K: DC gain or steady state value

T: time constant

Example: Find the DC gain and time constant of:

$$G(s) = \frac{5}{3s+1}$$

نقارنها بالصورة العامة نجد أن:

DC gain = 5

Time constant = 3

Example: Find DC gain and time constant of:

$$G(s) = \frac{5}{s+2}$$

ليست على الصورة العامة ، لازم نحولها على الصورة العامة:

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}s+1}$$

نقسم البسط والمقام على 2

DC gain = $\frac{5}{2}$

Time constant = $\frac{1}{2}$

ملاحظة/ نستطيع أيضًا إيجاد قيمة DC gain كما تعلمنا سابقًا عن طريق تعويض كل (S) بصفر

Ahmed Alsharani

※ settling time for first-Order system:

5% settling time = 3T
2% settling time = 4T

Example: Find the 5% and 2% settling time for

$$G(s) = \frac{3}{2s + 6}$$

أولاً نحولها على الصورة العامة :

$$G(s) = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{2}{6}s + 1}$$

$T = \frac{2}{6} \Rightarrow$ 5% settling time $= 3 \times T$

$$= 3 \times \frac{2}{6} = \boxed{1}$$

2% settling time $= 4 \times T$

$$= 4 \times \frac{2}{6} = \boxed{1.33}$$

- نظري / ال Time constant يعبر عن سرعة ال Response
كلما زادت قيمة T كلما كان ال Response أبطأ
علاقة عكسية

Ahmed Alsharani

بالنسبة لل Second-order system ، الصورة العامة :

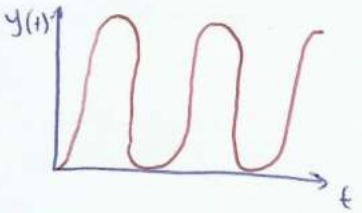
$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ω_n: Undamped natural frequency

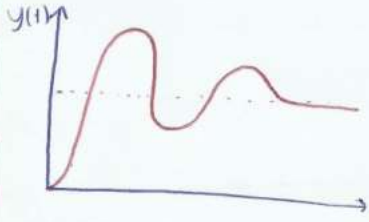
ζ : Damping ratio

عندي أربع حالات بالنسبة لل ζ (damping ratio) ، ممكن يعطيك رسمة و يسألك أيت حالة فيهم .

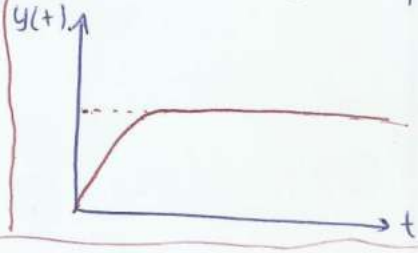
① $\zeta = 0$
Undamped



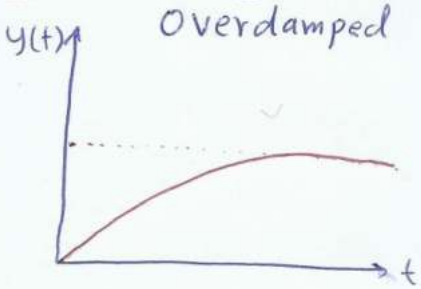
② $0 < \zeta < 1$
Underdamped



③ $\zeta = 1$
Critically damped



④ $\zeta > 1$
Overdamped



قوانين الـ Second order :

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\text{Peak time} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\text{Peak value} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\text{Percent overshoot} = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\text{Time constant} = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

$$\text{Settling time (5\%)} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\text{settling time (2\%)} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Ahmed Alsharani

Example: for the $G(s)=\frac{7}{S^2+3S+7}$

Find: ① DC gain ② Undamped natural frequency ω_n
③ damped frequency ω_d ④ damping ratio ζ
⑤ Peak time T_p ⑥ Peak value
⑦ Percent overshoot P.O. ⑧ time constant
⑨ 5% and 2% sittling time

Solution: DC gain $\Rightarrow G(0)=\frac{7}{0^2+3(0)+7}=\frac{7}{7}=\boxed{1}$

$$\frac{7}{S^2+3S+7}=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$$ نقارنها بالصورة العامة:

$\omega_n^2=7 \Rightarrow \boxed{\omega_n=\sqrt{7}}$

$2\zeta\omega_n=3 \Rightarrow \zeta=\frac{3}{2\omega_n}=\boxed{\frac{3}{2\sqrt{7}}}=0.57$

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\sqrt{7}\times\sqrt{1-0.57^2}=\boxed{2.17}$

$1+e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=$ Peak value

$=1+e^{-\frac{0.57\pi}{\sqrt{1-0.57^2}}}=\boxed{1.11}$

Peak time $T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{2.17}=\boxed{1.44}$

Percent overshoot $P.O.=100e^{-\frac{0.57\pi}{\sqrt{1-0.57^2}}}=\boxed{11.3\%}$

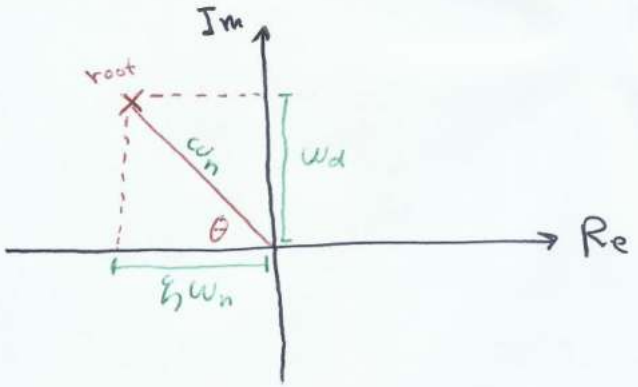
Time constant $T=\frac{1}{\zeta\omega_n}=\frac{1}{0.57\sqrt{7}}=\boxed{0.66}$

sittling time (5%) $=3\times T=\frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{0.57\sqrt{7}}=\boxed{1.99}$

Settling time (2%) $=4\times T=\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.57\sqrt{7}}=\boxed{2.65}$

Ahmed Alsharani

* علاقة pole location مع $(\zeta, \omega_n, \omega_d)$:



$\cos\theta = \zeta$

P.O. 5% $\longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

P.O. 16% $\longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

ω_d = المسافة العمودية

$\zeta\omega_n$ = المسافة الأفقية

ω_n = طول الوتر

نلاحظ أن العلاقة بين ال Damping ratio ζ و θ علاقة عكسية .

بينما العلاقة بين ال P.O. overshoot و θ علاقة طردية .

Example: Find the location of poles for these specifications:

(a) P.O. at most 16% ?

(b) Settling time (2%) at most 0.7 ?

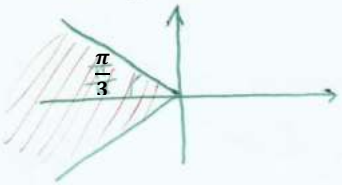
(c) P.O. at most 16% and T_p at most 4 sec ?

(d) T_s (5%) at most 5 sec and T_p at most 2 sec ?

Solution :

ⓐ P.O. 16% $\longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

نرسم الزاوية في المحاور ونهشر المنطقة المحصورة داخلها :



يعني أي pole داخل منطقة التهشير رح يحقق المطلوب .

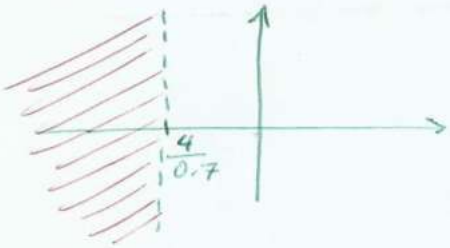
ⓑ $T_s(2\%)$ at most 0.7

$$T_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \frac{4}{\zeta\omega_n} < 0.7$$

$$\Rightarrow 4 < 0.7\,\zeta\omega_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{0.7} < \zeta\omega_n}$$

بما أن $\zeta\omega_n$ هي المسافة الأفقية ، حددها على الرسمة عند $\frac{4}{0.7}$ وهشر المنطقة بعدها :

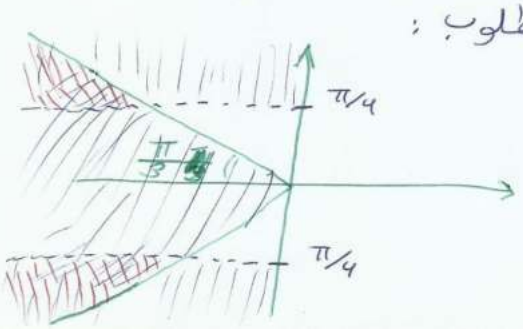


ⓒ P.O. 16% and $T_p < 4$

$\Rightarrow$ P.O. 16% $\longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow \frac{\pi}{\omega_d} < 4 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} < \omega_d}$$

الآن صار عندي شرطين ، أحدد أول شي الزاوية عشان الشرط الأول وأهشر ، وأحدد الـ ω_d على المسافة العمودية وأهشر ، والمنطقة المشتركة هي اللي تحقق المطلوب :



المنطقة باللون الأحمر هي المشتركة .

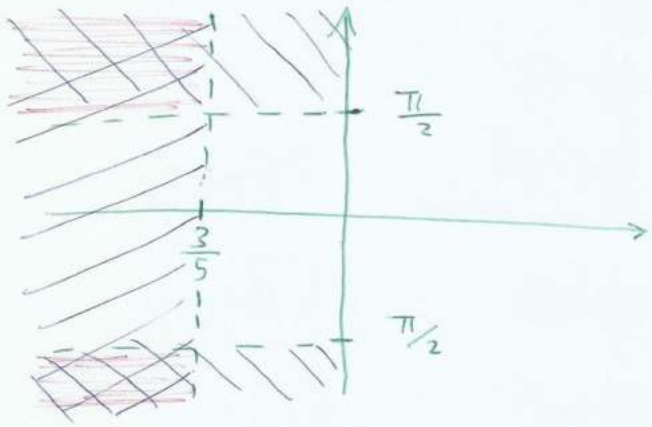
Ahmed Alsharani

(d) $T_s(5\%) < 5$ and $T_p < 2$

$5\%\ T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \longrightarrow \frac{3}{\zeta\omega_n} < 5 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{5} < \zeta\omega_n}$

$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \longrightarrow \frac{\pi}{\omega_d} < 2 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} < \omega_d}$

عندي شرطين ...



والمنطقة باللون الأحمر هي المشتركة

نستنتج مما سبق أن :

1 الرسمة بالأعلى مطابقة تمامًا بالأسفل

2 عند وجود أكثر من شرط فإن المنطقة المشتركة في التهشير هي التي تحقق كل الشروط .

Ahmed Alsharani