

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1437 - 1438 هـ
 حل الاختبار الفصلي الأول
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (3 درجات) :

استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^2 (6x - 5) dx$

الحل :

$$f(x) = 6x - 5, [a, b] = [1, 2]$$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[6\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 5\right] \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{n} + \frac{6k}{n^2} - \frac{5}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{6k}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{6k}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \\ &= \frac{6}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{6}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} (n) = 3 \frac{n(n+1)}{n^2} + 1 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 (6x - 5) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \frac{n(n+1)}{n^2} + 1\right) = 3(1) + 1 = 4$$

السؤال الثاني (3 درجات) :

أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1, 8]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ العلاقة}$$

$$[a, b] = [-1, 8] \text{ و } f(x) = \sqrt{x+1} \text{ حيث}$$

$$(8 - (-1)) \sqrt{c+1} = \int_{-1}^8 \sqrt{x+1} dx = \int_{-1}^8 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$9\sqrt{c+1} = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^8 = \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^8$$

$$9\sqrt{c+1} = \frac{2}{3} \left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - (-1+1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} [27 - 0] = 18$$

$$9\sqrt{c+1} = 18 \implies \sqrt{c+1} = 2 \implies c+1 = 4 \implies c = 3 \in (-1, 8)$$

السؤال الثالث (3 درجات) :
 $F'(0)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\cos x}^{1+\sin x} \sqrt{2+t} dt$ فأوجد
 الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{1+\sin x} \sqrt{2+t} dt \\ &= \sqrt{2+(1+\sin x)} \cos x - \sqrt{2+\cos x} (-\sin x) \\ F'(x) &= \cos x \sqrt{3+\sin x} + \sin x \sqrt{2+\cos x} \\ F'(0) &= \cos(0) \sqrt{3+\sin(0)} + \sin(0) \sqrt{2+\cos(0)} \\ F'(0) &= (1) \sqrt{3+0} + (0) \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

السؤال الرابع (6 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \sqrt{x} \ln(\cos x) \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\cos x) + \sqrt{x} \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{\ln(\cos x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \tan x \end{aligned}$$

$$y = 5^{\ln x} \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\ln x} \frac{1}{x} \ln 5$$

$$y = (1+x^2)^{\sin x} \quad (3)$$

الحل :

$$\ln |y| = \ln \left| (1+x^2)^{\sin x} \right| = \sin x \ln(1+x^2) \text{ ضع}$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \frac{2x}{1+x^2}$$

$$y' = y \left(\cos x \ln(1+x^2) + \sin x \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$y' = (1+x^2)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1+x^2) + \sin x \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

السؤال الخامس (10 درجات) : أحسب التكاملات التالية

$$\int_2^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx &= \int_2^4 \frac{2x-3}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_2^4 x^{-\frac{1}{2}} (2x-3) dx \\ &= \int_2^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = 2 \int_2^4 x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int_2^4 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^4 - 3 \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^4 = \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 - 6 [\sqrt{x}]_2^4 \\ &= \frac{4}{3} \left[(4)^{\frac{3}{2}} - (2)^{\frac{3}{2}} \right] - 6[\sqrt{4} - \sqrt{2}] = \frac{4}{3} (8 - 2\sqrt{2}) - 6(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + (\sin x)^2} dx \\ &= [\tan^{-1}(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan^{-1} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \tan^{-1}(\sin(0)) \\ &= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x \sqrt{8+x^2} dx \quad (3)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{8+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (8+x^2)^{\frac{1}{2}} (2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(8+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \left[(8+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - (8+0)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{3} (27 - 16\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (4)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx + \int \frac{1}{\sqrt{(2)^2 - (x)^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c = -\sqrt{4-x^2} + \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{\log_5 x}} \quad (5)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{\log_5 x}} &= \int \frac{dx}{x (\log_5 x)^{\frac{1}{2}}} dx = \int (\log_5 x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx \\ \ln 5 \int (\log_5 x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln 5} dx &= \ln 5 \frac{(\log_5 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 \ln 5 \sqrt{\log_5 x} + c \end{aligned}$$

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1437 - 1438 هـ
 حل الاختبار الفصلي الثاني
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \sinh\left(\frac{1}{x}\right) + \tanh(\sqrt{x}) \quad \text{حيث } x > 0 \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \ln x \sinh^{-1}(x) \quad \text{حيث } x > 0 \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sinh^{-1}(x) + \ln x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{\tanh(\ln|x|)}{x} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{\tanh(\ln|x|)}{x} dx = \int \tanh(\ln|x|) \frac{1}{x} dx = \ln(\cosh(\ln|x|)) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh(f(x)) f'(x) dx = \ln(\cosh(f(x))) + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 16}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2 - 4^2}} = \frac{1}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$. a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}} dx = \cosh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \ln(1 + x^2) dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln(1 + x^2) & dv &= dx \\ du &= \frac{2x}{1 + x^2} dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(1 + x^2) dx &= x \ln(1 + x^2) - \int \frac{2x}{1 + x^2} x dx \\ &= x \ln(1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2} dx = x \ln(1 + x^2) - \int \frac{(2x^2 + 2) - 2}{1 + x^2} dx \\ &= x \ln(1 + x^2) - \left(\int \frac{2(x^2 + 1)}{1 + x^2} dx - \int \frac{2}{1 + x^2} dx \right) \\ &= x \ln(1 + x^2) - \int 2 dx + 2 \int \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx &= \int (1 - u^2) u^2 du \\ &= \int (u^2 - u^4) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin(7x) \sin(4x) dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \sin(7x) \sin(4x) dx &= \int \frac{1}{2} [\cos(7x - 3x) - \cos(7x + 4x)] \\
&= \frac{1}{2} \int \cos(3x) dx - \frac{1}{2} \int \cos(11x) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \int \cos(3x) (3) dx - \frac{1}{2} \frac{1}{11} \int \cos(11x) (11) dx \\
&= \frac{1}{6} \sin(3x) - \frac{1}{22} \sin(11x) + c
\end{aligned}$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (6)$$

الحل الأول :

باستخدام التعويض $u = x^2 + 1$ ، أي أن $x^2 = u - 1$

$$2x dx = du \implies x dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int x^2 \sqrt{x^2 + 1} x dx \\
&= \int (u - 1) \sqrt{u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + c = \frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c
\end{aligned}$$

الحل الثاني : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int x^2 \left(x \sqrt{x^2 + 1} \right) dx \\
u = x^2 \quad dv &= x \sqrt{x^2 + 1} dx \\
du = 2x dx \quad v &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \\
\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{3} x^2 (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} (2x) dx \\
&= \frac{1}{3} x^2 (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \frac{2}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[x^2 - \frac{2}{5} (x^2 + 1) \right] + c \\
&= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{5} x^2 - \frac{2}{5} \right] + c \\
&= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{3}{5} x^2 + \frac{3}{5} \right) - 1 \right] + c \\
&= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{5} (x^2 + 1) - 1 \right] + c \\
&= \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c
\end{aligned}$$

الحل الثالث : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = \tan \theta \text{ ضع}$$

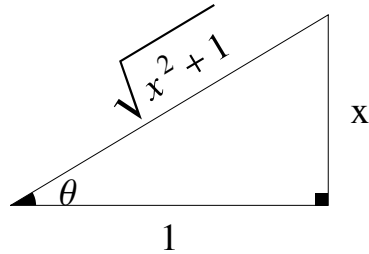
$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int (\tan \theta)^3 \sqrt{\tan^2 \theta + 1} \sec^2 \theta d\theta \\
&= \int \tan^3 \theta \sqrt{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \int \tan^3 \theta \sec^3 \theta d\theta \\
&= \int \tan^2 \theta \sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta = \int (\sec^2 \theta - 1) \sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta
\end{aligned}$$

$$u = \sec \theta \text{ ضع}$$

$$du = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int (\sec^2 \theta - 1) \sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta &= \int (u^2 - 1) u^2 du \\
&= \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c \\
&= \frac{1}{5} (\sec \theta)^5 - \frac{1}{3} (\sec \theta)^3 + c
\end{aligned}$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sec \theta = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{5} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^5 - \frac{1}{3} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^3 + c \\ &= \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x} dx \quad (7)$$

الحل : ياكمال المربع الكامل

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4x} dx &= \int \sqrt{(x^2 - 4x + 4) - 4} dx \\ &= \int \sqrt{(x - 2)^2 - (2)^2} dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويضات المثلثية

$$x - 2 = 2 \sec \theta$$

$$dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$x - 2 = 2 \sec \theta \implies \sec \theta = \frac{x - 2}{2} \quad \text{لاحظ أن}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x - 2)^2 - (2)^2} dx &= \int \sqrt{4 \sec^2 \theta - 4} 2 \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int \sqrt{4(\sec^2 \theta - 1)} 2 \sec \theta \tan \theta d\theta = \int \sqrt{4 \tan^2 \theta} 2 \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int 2 \tan \theta 2 \sec \theta \tan \theta d\theta = 4 \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = 4 \int \sec^3 \theta d\theta - 4 \int \sec \theta d\theta = 4I_1 - 4I_2 \end{aligned}$$

لحل التكامل I_1 نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ :

$$\begin{aligned} u &= \sec \theta & dv &= \sec^2 \theta d\theta \\ du &= \sec \theta \tan \theta d\theta & v &= \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta - \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta \\ &= \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \end{aligned}$$

$$2 \int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|$$

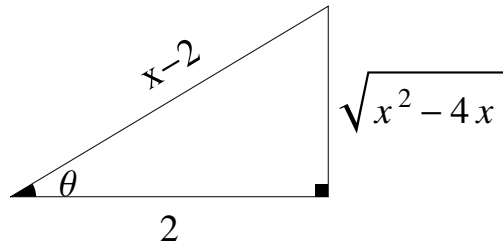
$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c_1$$

حل التكامل I_2 :

$$\int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c_2$$

$$\int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta = 4I_1 - 4I_2$$

$$\begin{aligned} &= 4 \left(\frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right) - 4 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \\ &= 2 \sec \theta \tan \theta - 2 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \end{aligned}$$



من المثلث نجد أن :

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{2} \text{ و } \sec \theta = \frac{x-2}{2}$$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x} dx$$

$$= 2 \left(\frac{x-2}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{2} \right) - 2 \ln \left| \frac{x-2}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x} dx \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x - 2 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A + B = 0 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$C = 1 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A = -2 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (1) نحصل على : $B = -A = 2$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^3+x} dx &= \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx \\ &= -2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -2 \ln |x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} \quad (9)$$

الحل : باستخدام التعويض $x = u^6$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} &= \int \frac{6u^5}{(u^6)^{\frac{1}{2}} + (u^6)^{\frac{1}{6}}} du = \int \frac{6u^5}{u^3 + u} du \\ &= \int \frac{6u^5}{u(u^2 + 1)} du = 6 \int \frac{u^4}{u^2 + 1} du \end{aligned}$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{u^4}{u^2 + 1} du &= 6 \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2 + 1} \right) du \\ &= 6 \left(\frac{u^3}{3} - u + \tan^{-1} u \right) + c = 2u^3 - 6u + 6 \tan^{-1} u + c \\ \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} &= 2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \tan^{-1} \left(x^{\frac{1}{6}} \right) + c \end{aligned}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1437 - 1438 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 1 + x^2$ على الفترة $[-1, 2]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ العلاقة}$$

$$[a, b] = [-1, 2] \text{ و } f(x) = 1 + x^2 \text{ حيث}$$

$$(2 - (-1)) (1 + c^2) = \int_{-1}^2 (1 + x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$3(1 + c^2) = \left(2 + \frac{8}{3} \right) - \left(-1 + \frac{-1}{3} \right)$$

$$3(1 + c^2) = 2 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 6 \implies 1 + c^2 = 2$$

$$\implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

لاحظ أن $c = 1 \in (-1, 2)$ بينما $c = -1 \notin (-1, 2)$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 5 \int x^{-4} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$= 5 \frac{x^{-3}}{-3} - 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{5}{3x^3} - 3x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2} dx = \int (\tan^{-1} x) \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} + c$$

باستخدام العلاقة

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{حيث } n \neq -1$$

$$\int 2^{3x+1} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int 2^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int 2^{3x+1} (3) dx = \frac{1}{3} \frac{2^{3x+1}}{\ln 2} + c$$

باستخدام العلاقة

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c \quad \text{حيث } a > 0$$

$$\int x e^x dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^x dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

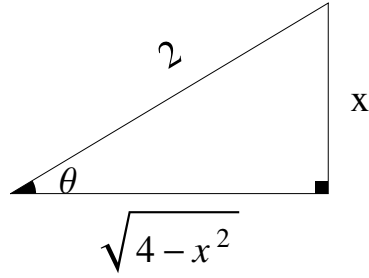
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$\sin \theta = \frac{x}{2} \quad \text{ضع } x = 2 \sin \theta \text{ ، عندئذ}$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{(2 \sin \theta)^2}{\sqrt{4-(2 \sin \theta)^2}} 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} 2 \cos \theta d\theta = \int \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4(1-\sin^2 \theta)}} 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} 2 \cos \theta d\theta = \int \frac{4 \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} 2 \cos \theta d\theta = \int 4 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int 4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \int (2 - 2 \cos 2\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\theta - \sin 2\theta + c = 2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta + c$$



من المثلث نجد أن :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \text{ و } \sin \theta = \frac{x}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{2} \implies \theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \text{ لاحظ أن}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) - 2 \frac{x}{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2} dx \quad (6)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A_1x(x-1) + A_2(x-1) + A_3x^2}{x^2(x-1)}$$

$$x^2+1 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + A_3x^2$$

$$= A_1x^2 - A_1x + A_2x = A_2 + A_3x^2 = (A_1 + A_3)x^2 + (-A_1 + A_2) - A_2$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A_1 + A_3 = 1 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$-A_1 + A_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$-A_2 = 1 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (3) نجد أن $A_2 = -1$

من المعادلة (2) نجد أن $A_1 = A_2 = -1$

من المعادلة (1) نجد أن $A_3 = 1 - A_1 = 2$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} dx &= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\
&= -\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx \\
&= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2 \ln|x-1| + c = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + c
\end{aligned}$$

السؤال الثالث :

$$(أ) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x + x \cos x}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x + x \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2 + 1 + 0} = \frac{1}{3}$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(e^x)]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(e^t) - \tan^{-1}(e^0)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

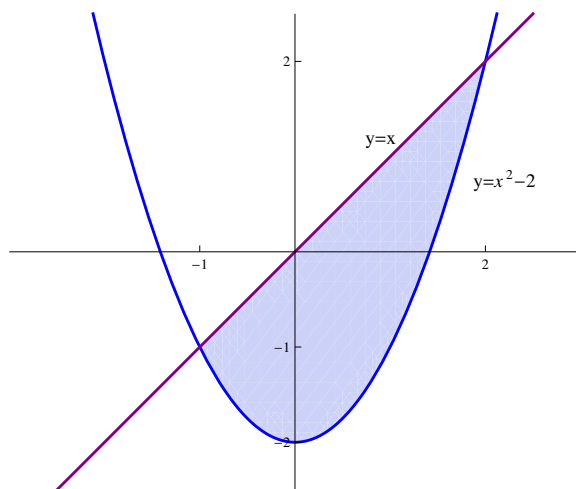
التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي $\frac{\pi}{4}$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 2$ و $y = x$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = x^2 - 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, -2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = x$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x$ و $y = x^2 - 2$:

$$x^2 - 2 = x \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\implies x = -1, x = 2$$

$$A = \int_{-1}^2 [x - (x^2 - 2)] dx = \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2 = \left[\left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{3} - 2 \right) \right]$$

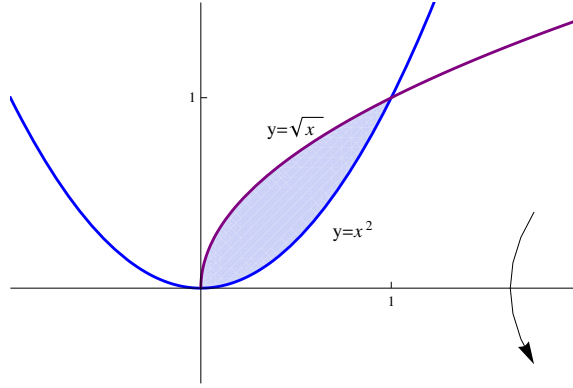
$$= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته لليمين .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0, x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0 - 0) \right]$$

$$= \pi \left(\frac{5 - 2}{10} \right) = \frac{3\pi}{10}$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 3$.

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$L = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\ln 3} \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int_0^{\ln 3} \cosh x dx = [\sinh x]_0^{\ln 3}$$

$$= \sinh(\ln 3) - \sinh(0) = \sinh(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[1, 4]$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x+1} dx = \pi \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \pi \frac{1}{4} \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}} (4) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} (17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (5)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{6} \left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-2)^2 = 4$ إلى معادلة قطبية ثم تعرف على بيانها .

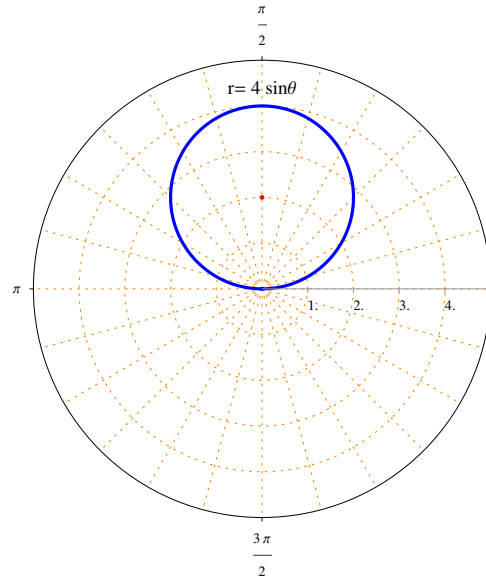
الحل :

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \implies x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$\implies x^2 + y^2 - 4y = 0 \implies x^2 + y^2 = 4y$$

$$\implies r^2 = 4r \sin \theta \implies r = 4 \sin \theta$$

المعادلة القطبية $r = 4 \sin \theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(2, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 2 .

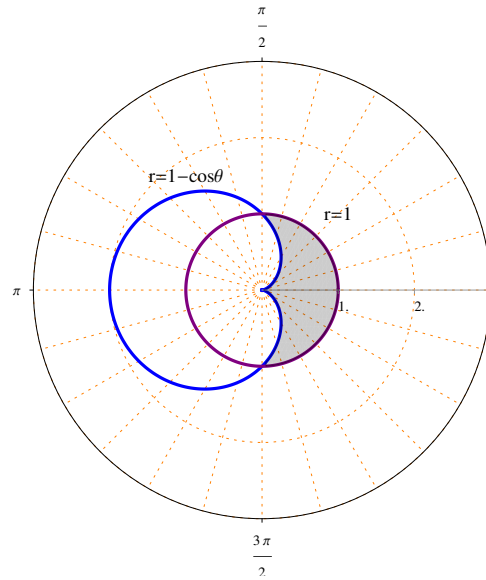


(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1$ وخارج المنحنى $r = 1 - \cos \theta$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r = 1$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 1 .

المنحنى $r = 1 - \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1$ مع المنحنى $r = 1 - \cos \theta$:

$$1 - \cos \theta = 1 \implies \cos \theta = 0 \implies \theta = -\frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$$

. لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1)^2 - (1 - \cos \theta)^2] d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \cos \theta - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \cos \theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \\ &= \left[2 \sin \theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin \pi}{2} \right] - \left[2 \sin(0) - \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2} \frac{\sin(0)}{2} \right] \\ &= \left(2 - \frac{\pi}{4} - 0 \right) - (0 - 0 - 0) = 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1437 - 1438 هـ
 حل الاختبار الفصلي الأول
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

$$(1) \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل } \int_1^2 (6 - 2x) dx$$

الحل :

$$f(x) = 6 - 2x, [a, b] = [1, 2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[6 - 2\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right] \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left[6 - 2 - \frac{2k}{n}\right] \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[4 - \frac{2k}{n}\right] \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{4}{n} - \frac{2k}{n^2}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{4}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n^2} = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{4}{n}(n) - \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 4 - \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 (6 - 2x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{n+1}{n}\right) = 4 - 1 = 3$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2 + 1$ على الفترة $[0, 2]$

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$\text{حيث } [a, b] = [0, 2] \text{ و } f(x) = 3x^2 + 1$$

$$(2-0)(3c^2+1) = \int_0^2 (3x^2+1) dx$$

$$2(3c^2+1) = [x^3+x]_0^2 = [(8+2)-(0+0)] = 10$$

$$3c^2+1=5 \implies 3c^2=4 \implies c^2=\frac{4}{3} \implies c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$ وبالتالي هي القيمة المطلوبة .

$$c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0, 2) \text{ بينما}$$

$$(3) \text{ إذا كانت } F(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{2+t^4}} \text{ فأوجد } F'(x)$$

الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\tan x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{2+t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2+(x^2)^4}} (2x) - \frac{1}{\sqrt{2+(\tan x)^4}} (\sec^2 x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2+x^8}} - \frac{\sec^2 x}{\sqrt{2+\tan^4 x}} \end{aligned}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$x > 0, y = (\cot x) (\ln \sqrt{x}) \quad (1)$$

الحل :

$$y = (\cot x) (\ln \sqrt{x}) = (\cot x) \left(\frac{1}{2} \ln x \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (-\csc^2 x) \left(\frac{1}{2} \ln x \right) + (\cot x) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \csc^2 x \ln x + \frac{\cot x}{2x} \end{aligned}$$

$$0 < x < 1, y = \frac{x^x \sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1} x} \quad (2)$$

الحل :

$$\ln |y| = \ln \left| \frac{x^x \sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1} x} \right| = \ln \left| \frac{x^x (1+4x)^{\frac{1}{3}}}{\sin^{-1} x} \right| \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \ln |x^x| + \ln \left| (1+4x)^{\frac{1}{3}} \right| - \ln |\sin^{-1} x|$$

$$\ln |y| = x \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |1+4x| - \ln |\sin^{-1} x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{3} \frac{4}{(1+4x)} - \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin^{-1} x}$$

$$y' = y \left[\ln |x| + 1 + \frac{4}{3(1+4x)} - \frac{1}{\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$y' = \frac{x^x \sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1} x} \left[\ln |x| + 1 + \frac{4}{3(1+4x)} - \frac{1}{\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2}} \right]$$

السؤال الثالث (12 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} (x-1) dx \\ &= \int \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - 3 x^{\frac{1}{3}} + c \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{1+\sin x} \cos x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \sqrt{1+\sin x} \cos x dx = \int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}} \cos x dx = \frac{(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

باستخدام القاعدة

$$n \neq -1 \text{ حيث } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} &= \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2)^2-(3)^2}} = \int \frac{x}{x^2\sqrt{(x^2)^2-(3)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2\sqrt{(x^2)^2-(3)^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \sec^{-1} \left(\frac{x^2}{3} \right) + c \end{aligned}$$

باستخدام القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x + \cos x)}{x^2 + 2 \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2 \sin x| + c \end{aligned}$$

باستخدام القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int \frac{e^{3 \ln x}}{x^4} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3 \ln x}}{x^4} dx &= \int \frac{e^{\ln x^3}}{x^4} dx = \int \frac{x^3}{x^4} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{3^x}{4 + 3^{2x}} dx \quad (6)$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \frac{3^x}{4 + 3^{2x}} dx &= \int \frac{3^x}{(2)^2 + (3^x)^2} dx \\ &= \frac{1}{\ln 3} \int \frac{3^x \ln 3}{(2)^2 + (3^x)^2} dx = \frac{1}{\ln 3} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{3^x}{2} \right) + c\end{aligned}$$

بإستخدام القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1437 - 1438 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1, 2]$

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ العلاقة}$$

$$[a, b] = [-1, 2] \text{ و } f(x) = \sqrt{x+2} \text{ حيث}$$

$$(2 - (-1)) \sqrt{c+2} = \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2$$

$$3\sqrt{c+2} = \frac{2}{3}(2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-1+2)^{\frac{3}{2}}$$

$$3\sqrt{c+2} = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$\sqrt{c+2} = \frac{14}{9} \implies c+2 = \left(\frac{14}{9}\right)^2 \implies c = \left(\frac{14}{9}\right)^2 - 2 = \frac{34}{81} \in (-1, 2)$$

السؤال الثاني : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \sinh(1 + \sqrt{x}) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh(1 + \sqrt{x}) \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\cosh(1 + \sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \sinh^{-1}(x) \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} \sinh^{-1}(x) + \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-\sinh^{-1}(x)}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

السؤال الثالث : احسب التكاملات التالية :

$$\int 2^x 5^{2^x} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int 2^x 5^{2^x} dx = \frac{1}{\ln 2} \int 5^{2^x} (2^x \ln 2) dx = \frac{1}{\ln 2 \ln 5} 5^{2^x} + c$$

$$a > 1 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \text{ باستخدام القاعدة}$$

$$x > 0 \text{ حيث } \int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cosh(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sinh(\sqrt{x}) + c$$

$$\int \cosh(f(x)) f'(x) dx = \sinh(f(x)) + c \text{ باستخدام القاعدة}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}} \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}} = \int \frac{x^3}{x^4\sqrt{1+x^8}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4\sqrt{1+(x^4)^2}} dx = -\frac{1}{4} \operatorname{csch}^{-1}(x^4) + c$$

$$a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{|f(x)| \sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \text{ باستخدام القاعدة}$$

$$\int x \sin x dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \implies -du = \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx &= - \int (1 - u^2) u^2 \, du = - \int (u^2 - u^4) \, du \\ &= - \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + c = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin(7x) \cos(5x) \, dx \quad (6)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin(7x) \cos(5x) \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(7x - 5x) + \sin(7x + 5x)] \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} [\sin(2x) + \sin(12x)] \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(12x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \sin(2x) (2) \, dx + \frac{1}{2} \frac{1}{12} \int \sin(12x) (12) \, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{24} \cos(12x) + c \end{aligned}$$

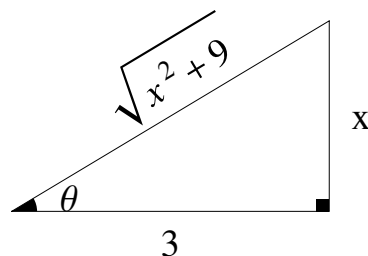
$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

الحل :

باستخدام التعويض المثلثي $x = 3 \tan \theta$ وهذا يعني أن $\tan \theta = \frac{x}{3}$

$$dx = 3 \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9 \tan^2 \theta + 9)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{[9 (\tan^2 \theta + 1)]^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{[9 \sec^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \, d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9)^{\frac{3}{2}} (\sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{27 \sec^3 \theta} \, d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sec \theta} \, d\theta = \frac{1}{9} \int \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{9} \sin \theta + c \end{aligned}$$



من المثلث نجد أن : $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{A_2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{A_3(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x+1)$$

$$1 = A_1(x^2 - 2x + 1) + A_2(x^2 - 1) + A_3(x + 1)$$

$$1 = A_1x^2 - 2A_1x + A_1 + A_2x^2 - A_2 + A_3x + A_3$$

$$1 = (A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_3)x + (A_1 - A_2 + A_3)$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في الطرفين نجد أن

$$A_1 + A_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$-2A_1 + A_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A_1 - A_2 + A_3 = 1 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

بجمع المعادلات الثلاث نجد أن :

$$2A_3 = 1 \implies A_3 = \frac{1}{2}$$

من المعادلة (2) نجد أن

$$-2A_1 + \frac{1}{2} = 0 \implies -2A_1 = -\frac{1}{2} \implies A_1 = \frac{1}{4}$$

من المعادلة (1) نجد أن

$$\frac{1}{4} + A_2 = 0 \implies A_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} &= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int (x-1)^{-2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + c$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}} dx \quad (9)$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = u^6$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}} dx &= \int \frac{(u^6)^{\frac{1}{2}} 6u^5}{(u^6)^{\frac{1}{2}} - (u^6)^{\frac{1}{3}}} du = \int \frac{6u^5 u^3}{u^3 - u^2} du = \int \frac{6u^8}{u^2(u-1)} du \\ &= \int \frac{6u^6}{u-1} du = 6 \int \left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= 6 \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln |u-1| \right) + c \\ &= \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^6 + \frac{6}{5} \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^5 + \frac{3}{2} \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^4 + 2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 + 3 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| + c \\ &= x + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| + c \end{aligned}$$

السؤال الرابع :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x + \ln x} \quad (\text{أ}) \text{ أحسب}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x + \ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x + \ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} \right)}{\left(\frac{x+1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 + \ln x)}{2\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(2 + \ln x)}{2(x+1)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(2 + \ln x)}{2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x) + \sqrt{x} \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2+\ln x)+2}{2\sqrt{x}}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \ln x}{4\sqrt{x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \ln x}{4\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

$$\text{الحل : لاحظ أن } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \infty$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 4^-} (-1) \int_0^t (4-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left((-1) \left[2(4-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow 4^-} \left((-1) \left[2(4-t)^{\frac{1}{2}} - 2(4-0)^{\frac{1}{2}} \right] \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[2\sqrt{4} - 2\sqrt{4-t} \right] = 2(2) - 2(0) = 4$$

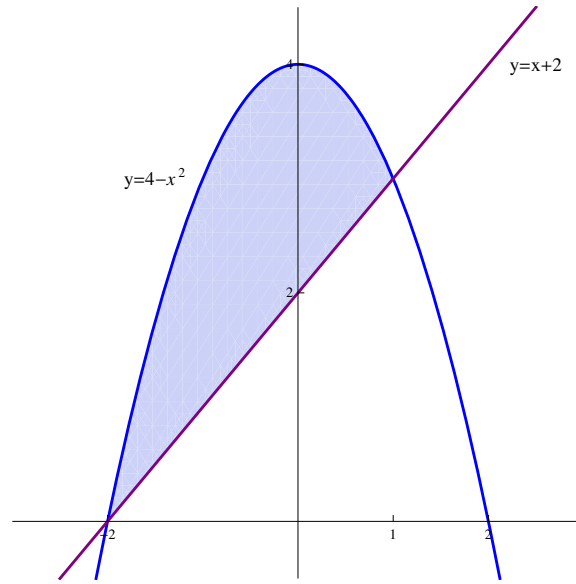
التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي 4

السؤال الخامس : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\implies x = -2, x = 1$$

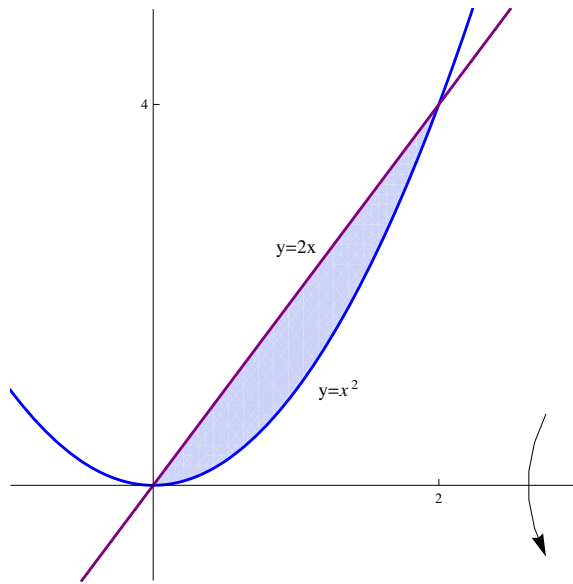
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

السؤال السادس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0$$

$$\implies x = 0, x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات:

$$V = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5} \right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5} \right) \right]$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{64}{15}\pi$$