

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1436 - 1437 هـ
 حل الاختبار الفصلي الأول
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل $\int_0^3 (2x - 1) dx$

الحل :

$$f(x) = 2x - 1, [a, b] = [0, 3]$$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left[2\left(\frac{3k}{n}\right) - 1\right] \left(\frac{3}{n}\right)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{18k}{n^2} - \frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{18}{n^2} k - \sum_{k=1}^n \frac{3}{n} = \frac{18}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n 1$$

$$R_n = \frac{18}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{n} n = 9 \frac{n(n+1)}{n^2} - 3$$

$$\int_0^3 (2x - 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 \frac{n(n+1)}{n^2} - 3\right) = 9(1) - 3 = 9 - 3 = 6$$

السؤال الثاني : أوجد قيمة c التي تحقق شرط مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 1 + x^2$ على الفترة $[-1, 2]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

$$[a, b] = [-1, 2] \text{ و } f(x) = 1 + x^2$$

$$(2 - (-1))(1 + c^2) = \int_{-1}^2 (1 + x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$$

$$3(1 + c^2) = \left(2 + \frac{8}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$3 + 3c^2 = 2 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 6$$

$$3c^2 = 3 \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

لاحظ أن $c = 1 \in (-1, 2)$ وبالتالي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-1, 2]$

بينما $c = -1 \notin (-1, 2)$

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\sin 2x} \sqrt{1-t^2} dt \text{ إذا كانت } F'(0) \text{ جد}$$

الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{\sin 2x} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \sqrt{1-(\sin 2x)^2} \cos 2x (2) - \sqrt{1-\cos^2 x} (-\sin x) \\ F'(x) &= 2 \cos 2x \sqrt{1-(\sin 2x)^2} + \sin x \sqrt{1-\cos^2 x} \\ F'(0) &= 2(1)\sqrt{1-0} + (0)\sqrt{1-1} = 2 \end{aligned}$$

السؤال الرابع : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$x > 0 \text{ حيث } y = \cos x \ln x \text{ (أ)}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin x) \ln x + \cos x \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$y = 2^{\sqrt{x} + \tan x} \text{ (ب)}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2^{\sqrt{x} + \tan x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sec^2 x \right) \ln 2$$

$$y = \frac{(1+x^2)(1-x)^2}{(3+x^3)^5} \text{ (ج)}$$

الحل :

$$\ln |y| = \ln \left| \frac{(1+x^2)(1-x)^2}{(3+x^3)^5} \right| \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \ln |1+x^2| + 2 \ln |1-x| - 5 \ln |3+x^3|$$

باشتقاق الطرفين

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{2x}{1+x^2} + 2 \frac{-1}{1-x} - 5 \frac{3x^2}{3+x^3} \\ y' &= y \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1-x} - \frac{15x^2}{3+x^3} \right) \\ y' &= \frac{(1+x^2)(1-x)^2}{(3+x^3)^5} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1-x} - \frac{15x^2}{3+x^3} \right)\end{aligned}$$

السؤال الخامس : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x+1}{x^5} dx \quad (\text{أ})$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^5} dx &= \int \left(\frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5} \right) dx \\ &= \int (x^{-4} + x^{-5}) dx = \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-4}}{-4} + c\end{aligned}$$

$$\int_0^2 |x-1| dx \quad (\text{ب})$$

الحل :

$$\begin{aligned}|x-1| &= \begin{cases} x-1 & ; \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & ; \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases} \\ \int_0^2 |x-1| dx &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \right] + \left[\left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{ج})$$

الحل :

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \tan \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2 \int \tan \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \ln |\sec \sqrt{x}| + c$$

$$\int \tan(f(x)) f'(x) dx = \ln |\sec(f(x))| + c \text{ باستخدام القاعدة}$$

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad (\text{د})$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx &= \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = - \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) dx \\ &= - \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = - \left(e^{\frac{1}{2}} - e^1 \right) = e - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \text{ باستخدام القاعدة}$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} \quad (\text{هـ})$$

الحل :

$$\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^4 \frac{\left(\frac{1}{x} \right)}{\ln x} dx = [\ln |\ln x|]_2^4 = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \text{ باستخدام القاعدة}$$

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1436 - 1437 هـ
 حل الاختبار الفصلي الثاني
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \cosh^2 x + \sinh^{-1}(x^2) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cosh x \sinh x + \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^2}} (2x) = 2 \cosh x \sinh x + \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$y = \tanh^{-1}(\sqrt{x}) \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{1-(e^x)^2}} dx = -\operatorname{sech}^{-1}(e^x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} &= \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+1)+4}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

$$\int_1^e \ln x \, dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [e \ln(e) - \ln(1)] - [e - 1] = [e - 0] - [e - 1] = e - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\int \sin^3 x \cos^7 x \, dx \quad (4)$$

: الحل

$$\int \sin^3 x \cos^7 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^7 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^7 x \sin x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \implies -du = \sin x \, dx$$

$$\int (1 - \cos^2 x) \cos^7 x \sin x \, dx = - \int (1 - u^2) u^7 \, du$$

$$= - \int (u^7 - u^9) \, du = - \left(\frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} \right) + c = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{10} + c$$

$$\int \sec^4 x \, dx \quad (5)$$

: الحل

$$\int \sec^4 x \, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \sec^2 x \, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \sec^2 x \, dx + \int (\tan x)^2 \sec^2 x \, dx = \tan x + \frac{(\tan x)^3}{3} + c$$

$$\int \sin(3x) \cos(2x) \, dx \quad (6)$$

: الحل

$$\int \sin(3x) \cos(2x) \, dx = \int \frac{1}{2} (\sin[(3-2)x] + \sin[(3+2)x]) \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{2} (\sin x + \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \frac{1}{5} \int \sin 5x (5) dx = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c
\end{aligned}$$

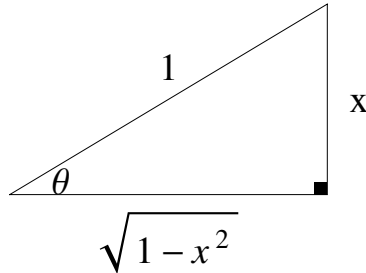
$$\int (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \quad (7)$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

نستخدم التعويض $x = \sin \theta$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx &= \int (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta d\theta = \int (\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta d\theta \\
&= \int \cos^3 \theta \cos \theta d\theta = \int \cos^4 \theta d\theta = \int (\cos^2 \theta)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int d\theta + \frac{1}{4} \int \cos 2\theta (2) d\theta + \frac{1}{4} \int \cos^2 2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \int 1 d\theta + \frac{1}{8} \frac{1}{4} \int \cos 4\theta (4) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta + c \\
&= \frac{3}{8} \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{32} (4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1))
\end{aligned}$$



$$\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{3}{8} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{32} \left(4x \sqrt{1-x^2} (2(1-x^2) - 1) \right) + c$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta : \text{تذكر أن}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$1 = (A+B)x^2 + (-B+C)x + A - C$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A+B=0 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$-B+C=0 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A-C=1 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

$$2A=1 \implies A=\frac{1}{2} : \text{بجمع المعادلات الثلاث نحصل على}$$

$$B=-\frac{1}{2} : \text{من المعادلة (1) نحصل على}$$

$$C=-\frac{1}{2} : \text{من المعادلة (2) نحصل على}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (9)$$

الحل : باستخدام تعويض نصف الزاوية

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2 du}{1 + u^2}, \quad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} du$$

$$= \int \frac{2}{(1 + u^2) + 2u + (1 - u^2)} du = \int \frac{2}{2u + 2} du$$

$$= \int \frac{2}{2(u + 1)} du = \int \frac{du}{u + 1} = \ln |u + 1| + c = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right| + c$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1436 - 1437 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1, 8]$

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ العلاقة}$$

$$[a, b] = [-1, 8] \text{ و } f(x) = \sqrt{x+1} \text{ حيث}$$

$$(8 - (-1)) \sqrt{c+1} = \int_{-1}^8 \sqrt{x+1} dx = \int_{-1}^8 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$9 \sqrt{c+1} = \left[\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^8 = \left[\frac{2}{3} (8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (-1+1)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$9 \sqrt{c+1} = \frac{2}{3} (9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (27) = 18$$

$$9 \sqrt{c+1} = 18 \implies \sqrt{c+1} = 2 \implies c+1 = 4 \implies c = 3$$

لاحظ أن $c = 3 \in (-1, 8)$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{(1)^2 + (e^x)^2} dx = \tan^{-1}(e^x) + c$$

باستخدام العلاقة

$$a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \ln(3^{\sin x}) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \ln(3^{\sin x}) dx = \int \sin x \ln 3 dx = \ln 3 \int \sin x dx$$

$$= \ln 3 (-\cos x) + c = -\ln 3 \cos x + c$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-1} \cos x dx = \left[\frac{(\sin x)^{-2}}{-2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\frac{1}{-2(\sin x)^2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-2(\sin(\frac{\pi}{2}))^2} - \left(\frac{1}{-2(\sin(\frac{\pi}{6}))^2} \right) \\ &= \frac{1}{-2(1)^2} + \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\int \tan^{-1} x dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x dx &= x \tan^{-1} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2} dx \quad (5)$$

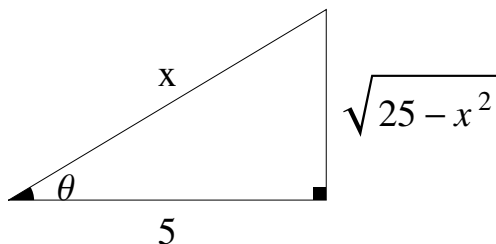
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$\sec \theta = \frac{x}{5} \text{ أن } x = 5 \sec \theta \text{ ضع}$$

$$dx = 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{(5 \sec \theta)^2 - 25}}{(5 \sec \theta)^2} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{25(\sec^2 \theta - 1)}}{25 \sec^2 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta = \int \frac{\sqrt{25 \tan^2 \theta}}{25 \sec^2 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int \frac{5 \tan \theta}{25 \sec^2 \theta} 5 \sec \theta \tan \theta d\theta = \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta - 1}{\sec \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} - \frac{1}{\sec \theta} \right) d\theta = \int (\sec \theta - \cos \theta) d\theta \\
&= \ln |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta + c
\end{aligned}$$



من المثلث نلاحظ أن :

$$\sec \theta = \frac{x}{5}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} dx = \ln \left| \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{ضع } x = u^6 \text{ أي أن } u = x^{\frac{1}{6}}$$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6u^5 du}{(u^6)^{\frac{1}{3}} - (u^6)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6u^5}{u^2 - u^3} du = \int \frac{6u^5}{u^2(1 - u)} du$$

$$= \int \frac{6u^3}{1 - u} du = -6 \int \frac{u^3}{u - 1} du = -6 \int \left[(u^2 + u + 1) + \frac{1}{u - 1} \right] du$$

$$= -6 \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln |u - 1| \right] + c$$

$$= -2u^3 - 3u^2 - 6u - 6 \ln |u - 1| + c$$

$$= -2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 3 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^2 - 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| + c$$

$$= -2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| + c$$

السؤال الثالث :

$$(أ) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x \quad (0.\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^x = +\infty \text{ لاحظ أن}$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t (\ln x)^{-2} \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln x)^{-1}}{-1} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\ln t} - \left(\frac{-1}{\ln 2} \right) \right] \\ &= 0 - \left(\frac{-1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

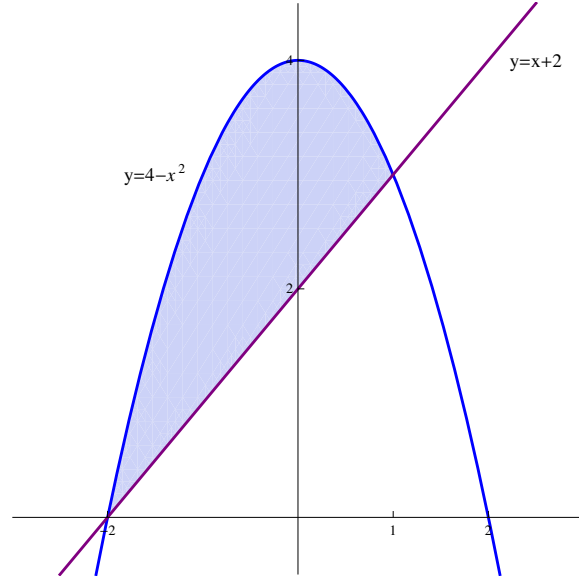
$$\frac{1}{\ln 2} \text{ التكامل المعتل متقارب وقيمته}$$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\implies x = -2, x = 1$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

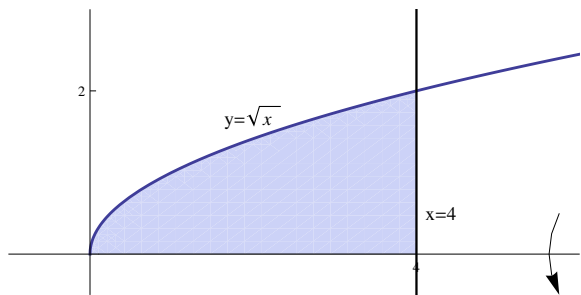
السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ و $y = 0$ و $x = 4$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x = 4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4, 0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2} \right) = 8\pi \end{aligned}$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 2$.

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x dx = [\sinh x]_0^{\ln 2} \end{aligned}$$

$$= \sinh(\ln 2) - \sinh(0) = \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{4 - x^2}$ ، $-2 \leq x \leq 2$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}} dx = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4\pi \int_{-2}^2 1 dx \\
&= 4\pi [x]_{-2}^2 = 4\pi[2 - (-2)] = 4\pi(4) = 16\pi
\end{aligned}$$

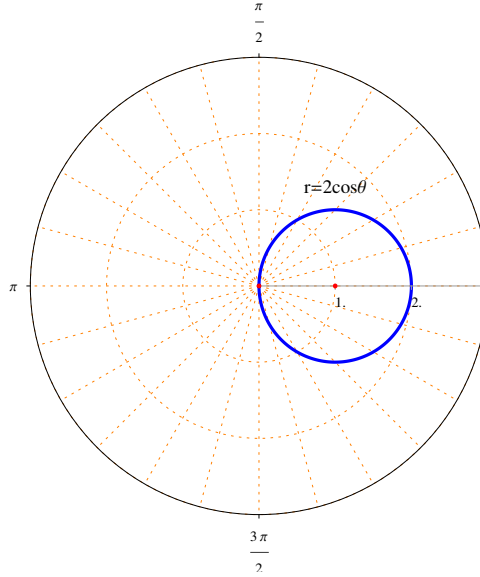
السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة القطبية $r = 2 \cos \theta$ إلى معادلة ديكارتية ثم تعرف على بيانها .

الحل :

$$\begin{aligned}
r = 2 \cos \theta &\implies r^2 = 2(r \cos \theta) \implies x^2 + y^2 = 2x \implies x^2 - 2x + y^2 = 0 \\
&\implies (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \implies (x-1)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

المعادلة الديكارتية تمثل دائرة مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1 .

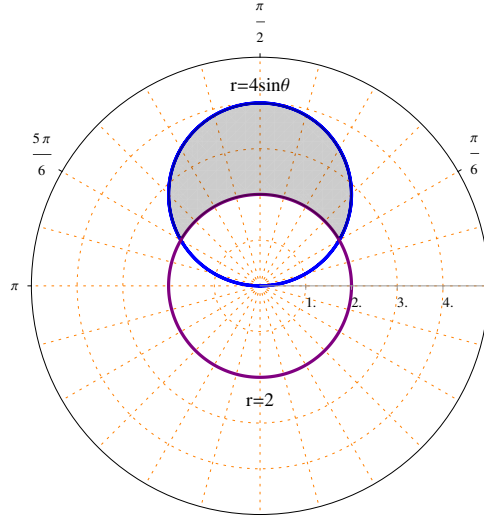


(ب) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

المنحنى $r = 4 \sin \theta$ يمثل دائرة مركزها $(2, \frac{\pi}{2})$ ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 4 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$4 \sin \theta = 2 \implies \sin \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [(4 \sin \theta)^2 - (2)^2] d\theta \right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (16 \sin^2 \theta - 4) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[16 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) - 4 \right] d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8 \cos \theta - 4) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8 \cos \theta) d\theta = [4\theta - 8 \sin \theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[4 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 8 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[4 \left(\frac{\pi}{6} \right) - 8 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= (2\pi - 8) - \left(\frac{2\pi}{3} - 4 \right) \\ &= 2\pi - 8 - \frac{2\pi}{3} + 4 = \frac{4\pi}{3} - 4 \end{aligned}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1436 - 1437 هـ
 حل الاختبار الفصلي الأول
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (9 درجات) :

$$(1) \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد } \int_0^2 (4x - 3) dx$$

الحل :

$$f(x) = 4x - 3, [a, b] = [0, 2]$$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left[4\left(\frac{2k}{n}\right) - 3\right] \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{16k}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{16}{n^2} k - \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n 1$$

$$R_n = \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n} n = 8 \frac{n(n+1)}{n^2} - 6$$

$$\int_0^2 (4x - 3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 \frac{n(n+1)}{n^2} - 6\right) = 8(1) - 6 = 8 - 6 = 2$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق شرط نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-2, 0]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

$$[a, b] = [-2, 0] \text{ و } f(x) = x^2 \text{ حيث}$$

$$(0 - (-2))c^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^0$$

$$2c^2 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 0 - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \implies c = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 0)$ وبالتالي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-2, 0]$

بينما $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \notin (-2, 0)$

$$F(x) = \int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2) dt \text{ إذا كانت } F'(2) \text{ (3)}$$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2) dt = \ln((x^2)^2) (2x) - \ln((2x-3)^2) (2)$$

$$F'(x) = 2x \ln(x^4) - 2 \ln(2x-3)^2 = 8x \ln(x) - 4 \ln|2x-3|$$

$$F'(2) = 16 \ln(2) - 4 \ln|4-3| = 16 \ln(2) - 4 \ln(1) = 16 \ln(2)$$

السؤال الثاني (4 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \sqrt{x} \ln x \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = (\tan x)^{\tan^{-1} x} \quad (2)$$

الحل :

$$\ln |y| = \ln |(\tan x)^{\tan^{-1} x}| \text{ ضع}$$

$$\ln |y| = \tan^{-1} x \ln |\tan x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \ln |\tan x| + \tan^{-1} x \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$y' = y \left[\frac{\ln |\tan x|}{1+x^2} + \tan^{-1} x \frac{\sec^2 x}{\tan x} \right]$$

$$y' = (\tan x)^{\tan^{-1} x} \left[\frac{\ln |\tan x|}{1+x^2} + \tan^{-1} x \frac{\sec^2 x}{\tan x} \right]$$

السؤال الثالث (12 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x} (x+1)^2 dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} (x+1)^2 dx &= \int \sqrt{x} (x^2 + 2x + 1) dx = \int x^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln |x| + c \end{aligned}$$

$$\int x (x^2 + 5)^7 dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int x (x^2 + 5)^7 dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 5)^7 (2x) dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 5)^8}{8} + c$$

$$n \neq -1 \quad \text{حيث} \quad \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{باستخدام القاعدة}$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} \sec^2 x dx = e^{\tan x} + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \text{باستخدام القاعدة}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{dx}{x (\ln x)^{\frac{1}{2}}} = \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

باستخدام القاعدة $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x} \right) dx \quad (6)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \left(5^x + \frac{1}{2^x} \right) dx &= \int 5^x dx + \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx \\ &= \frac{1}{\ln 5} 5^x + \frac{1}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} \left(\frac{1}{2} \right)^x + c \end{aligned}$$

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1436 - 1437 هـ
 حل الاختبار الفصلي الثاني
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \ln(\sinh(2x)) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cosh(2x)}{\sinh(2x)} = 2 \coth(2x)$$

$$y = \cosh^{-1}(\sqrt{x}) \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{x-1}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 16}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 16}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (4)^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{e^x}{4}\right) + c$$

$$\int 2x \tan^{-1} x dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= 2x dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} dx & v &= x^2 \end{aligned}$$

$$\int 2x \tan^{-1} x dx = x^2 \tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= x^2 \tan^{-1} x - \int \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \tan^{-1} x - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= x^2 \tan^{-1} x - \int 1 dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= x^2 \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x + c
\end{aligned}$$

$$\int \cos x \sin^3 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \cos x \sin^3 x dx = \int (\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + c$$

$$\int \tan^3 x \sec^6 x dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^6 x dx &= \int \tan^2 x \sec^5 x \sec x \tan x dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \sec^5 x \sec x \tan x dx
\end{aligned}$$

نستخدم التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x \tan x dx$$

$$\begin{aligned}
\int (\sec^2 x - 1) \sec^5 x \sec x \tan x dx &= \int (u^2 - 1) u^5 du \\
&= \int (u^7 - u^5) du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^6}{6} + c = \frac{\sec^8 x}{8} - \frac{\sec^6 x}{6} + c
\end{aligned}$$

$$\int \sin(2x) \cos(4x) dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \sin(2x) \cos(4x) dx &= \int \frac{1}{2} (\sin[(2-4)x] + \sin[(4+2)x]) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sin(-2x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(6x) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \sin(2x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(6x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \sin(2x) (2) dx + \frac{1}{2} \frac{1}{6} \int \sin(6x) (6) dx \\
&= -\frac{1}{4} (-\cos(2x)) + \frac{1}{12} (-\cos(6x)) + c = \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(6x)}{12} + c
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (6)$$

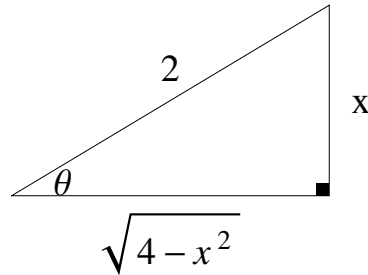
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(2)^2 - (x)^2}}$$

$$x = 2 \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{x}{2} \text{ نستخدم التعويض}$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} = \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)}} \\
&= \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4 \cos^2 \theta}} = \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{4 \sin^2 \theta 2 \cos \theta} = \int \frac{d\theta}{4 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{4} \cot \theta + c
\end{aligned}$$



$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-21}} dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-21}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-10x)-21}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 10x + 25) + (25 - 21)}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-5)^2 + 4}} \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{(2)^2 - (x-5)^2}}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x-5}{2} \right) + c \\
&\int \frac{x-2}{x^3+x} dx \quad (8)
\end{aligned}$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{(x^2+1)x}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x-2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود

$$A+B=0 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$C=1 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$A=-2 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (1) نحصل على : $B=2$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-2}{x^3+x} dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx \\
&= -2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= -2 \ln|x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c
\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx \quad (9)$$

الحل : نستخدم التعويض

$$\begin{aligned}
u = \sqrt{1+\sqrt{x}} &\implies 1+\sqrt{x} = u^2 \implies \sqrt{x} = u^2 - 1 \implies x = (u^2 - 1)^2 \\
dx &= 2(u^2 - 1)(2u) du = (4u^3 - 4u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx &= \int u(4u^3 - 4u) \, du = \int (4u^4 - 4u^2) \, du \\ &= 4 \frac{u^5}{5} - 4 \frac{u^3}{3} + c = \frac{4}{5} \left(\sqrt{1+\sqrt{x}} \right)^5 - \frac{4}{3} \left(\sqrt{1+\sqrt{x}} \right)^3 + c\end{aligned}$$

111 ريض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1436 - 1437 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ على الفترة $[-2, 0]$

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ العلاقة}$$

$$\text{حيث } [a, b] = [-2, 0] \text{ و } f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$(0 - (-2)) (c+1)^{\frac{1}{3}} = \int_{-2}^0 (x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} (x+1)^{\frac{4}{3}} \right]_{-2}^0$$

$$2(c+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}(0+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}(-2+1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$2(c+1)^{\frac{1}{3}} = 0 \implies (c+1)^{\frac{1}{3}} = 0 \implies c+1 = 0 \implies c = -1$$

$$c = -1 \in (-2, 0) \text{ لاحظ أن}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \tan(2x) dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \tan(2x) dx = \frac{1}{2} \int \tan(2x) (2) dx = \frac{1}{2} \ln |\sec(2x)| + c$$

$$\int \frac{5^{\tan^{-1} x}}{x^2 + 1} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{5^{\tan^{-1} x}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{\ln 5} \int 5^{\tan^{-1} x} \frac{1}{x^2 + 1} \ln 5 dx = \frac{1}{\ln 5} 5^{\tan^{-1} x} + c$$

باستخدام العلاقة

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c \text{ حيث } a > 0$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \ln x dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^{-\frac{1}{2}} dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - \int 2x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \left(2x^{\frac{1}{2}} \right) + c = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x)}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x-2)^2+4}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-(x-2)^2}} = \left[\sin^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) \right]_1^2 \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{2-2}{2} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{1-2}{2} \right) = \sin^{-1}(0) - \sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3-1}{x^2+x} dx \quad (5)$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة

$$\frac{x^3-1}{x^2+x} = (x-1) + \frac{x-1}{x^2+x}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية للدالة الكسرية $\frac{x-1}{x^2+x}$

$$\frac{x-1}{x^2+x} = \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x-1 = A_1(x+1) + A_2x$$

ضع $x = 0$:

$$0 - 1 = A_1(0 + 1) \implies A_1 = -1$$

ضع $x = -1$:

$$-1 - 1 = A_2(-1) \implies A_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} dx &= \int \left(x - 1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \int (x - 1) dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \ln|x| + 2 \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^5}} dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^5}} dx \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{3}}} dx$$

ضع $x = u^6$ أي أن $u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{3}}} dx &= \int \frac{(u^6)^{\frac{1}{2}} 6u^5}{(u^6)^{\frac{4}{3}} + (u^6)^{\frac{5}{3}}} du = \int \frac{6u^8}{u^8 + u^{10}} du \\ &= 6 \int \frac{u^8}{u^8(1 + u^2)} du = 6 \int \frac{du}{1 + u^2} = 6 \tan^{-1} u + c = 6 \tan^{-1} \left(x^{\frac{1}{6}} \right) + c \end{aligned}$$

السؤال الثالث :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)} \quad (\text{أ}) \text{ أحسب}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos \pi x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi(1+x) \cos \pi x$$

$$= \pi(1+0) \cos(0) = \pi(1)(1) = \pi$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^1 x \ln x \, dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x \, dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x \, dx \\ du &= \frac{1}{x} \, dx & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x \, dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_t^1 - \frac{1}{2} \int_t^1 x \, dx \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_t^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(0 - \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} \right) = 0 - 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4} \\ &\quad -\frac{1}{4} \text{ التكامل المعتل متقارب وقيمته} \end{aligned}$$

لاحظ أن :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{2} \ln t \quad (0, -\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{2} \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{2t^{-2}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

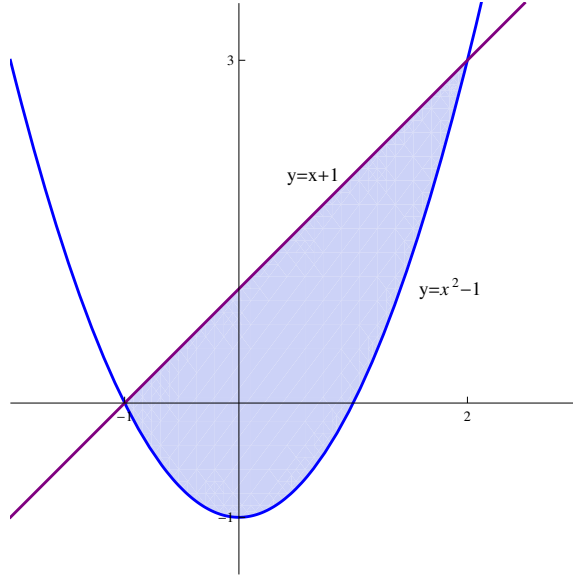
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{2t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-4t^{-3}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{-2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{-2} = 0$$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x + 1$ و $y = x^2 - 1$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = x^2 - 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, -1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = x + 1$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x + 1$ و $y = x^2 - 1$:

$$x^2 - 1 = x + 1 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0 \\ \implies x = -1, x = 2$$

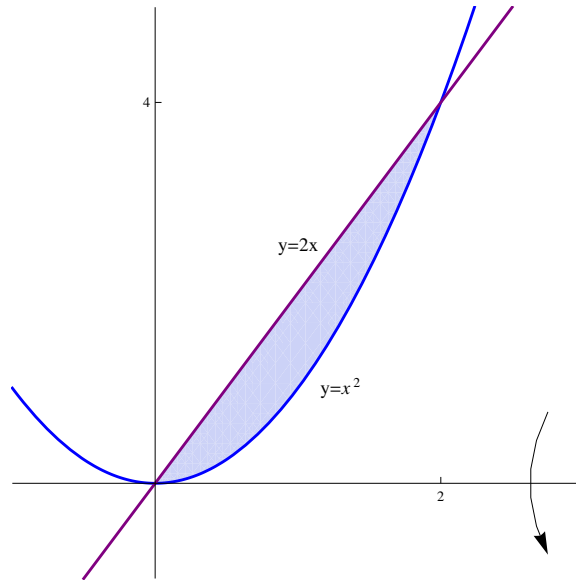
$$A = \int_{-1}^2 [(x + 1) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx \\ = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2 = \left[\left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{3} - 2 \right) \right] \\ = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويبرر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0 \\ \implies x = 0, x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5} \right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5} \right) \right] \\ = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{64}{15}\pi$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \pi + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ من $x = 0$ إلى $x = 3$.

الحل :

$$f(x) = \pi + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \int_0^3 (1 + x)^{\frac{1}{2}} dx \\ = \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(1 + 3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3}$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ ، $1 \leq x \leq 4$ ، حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x+1} dx = \pi \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \pi \frac{1}{4} \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}} (4) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} (17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (5)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{6} \left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

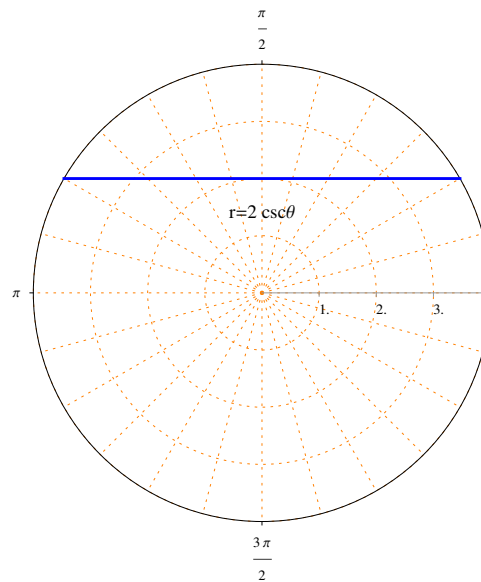
السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة القطبية $r = 2 \csc \theta$ إلى معادلة ديكارتية ثم تعرف على بيانها .

الحل :

$$r = 2 \csc \theta = \frac{2}{\sin \theta} \implies r \sin \theta = 2 \implies y = 2$$

المعادلة الديكارتية خط مستقيم موازي للمحور القطبي ويمر بالنقطة $(2, \frac{\pi}{2})$.

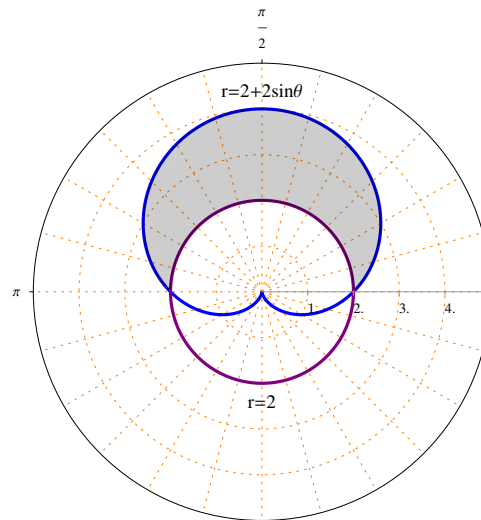


(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2 \sin \theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2 + 2 \sin \theta = 2 \implies \sin \theta = 0 \implies \theta = 0, \theta = \pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 + 2 \sin \theta)^2 - (2)^2] d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 + 8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta - 4] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8 \sin \theta + 4 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 8 \sin \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= [2\theta - 8 \cos \theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 8 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(2 \frac{\pi}{2} \right) \right] - [2(0) - 8 \cos(0) - \sin(2(0))] \\ &= (\pi - 0 - 0) - (0 - 8 - 0) = 8 + \pi \end{aligned}$$