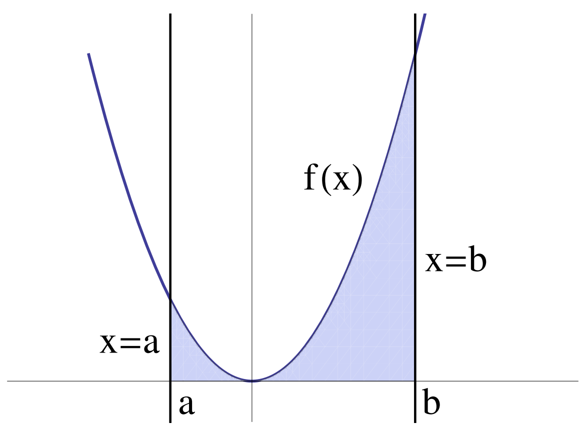
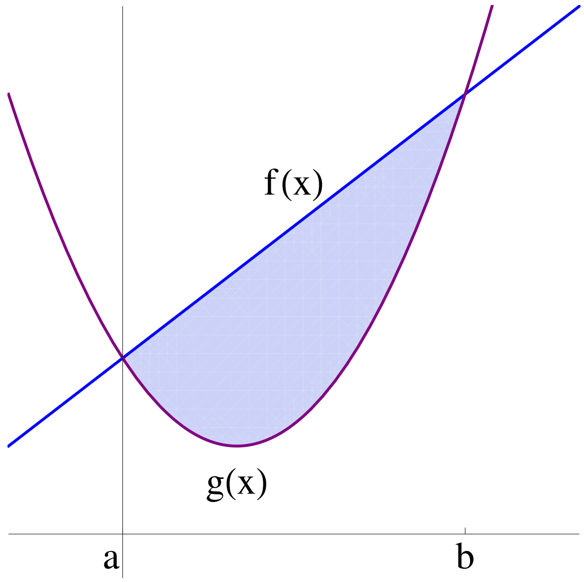
باب 7

تطبيقات التكامل

1.7 المساحات



إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور السينات والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي $A = \int_a^b f(x)\, dx$



إذا كانت الدالتان f و g متقاطعتين عند $x = a$ و $x = b$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in (a, b)$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $x = -1$ و $x = 2$ و $y = 0$

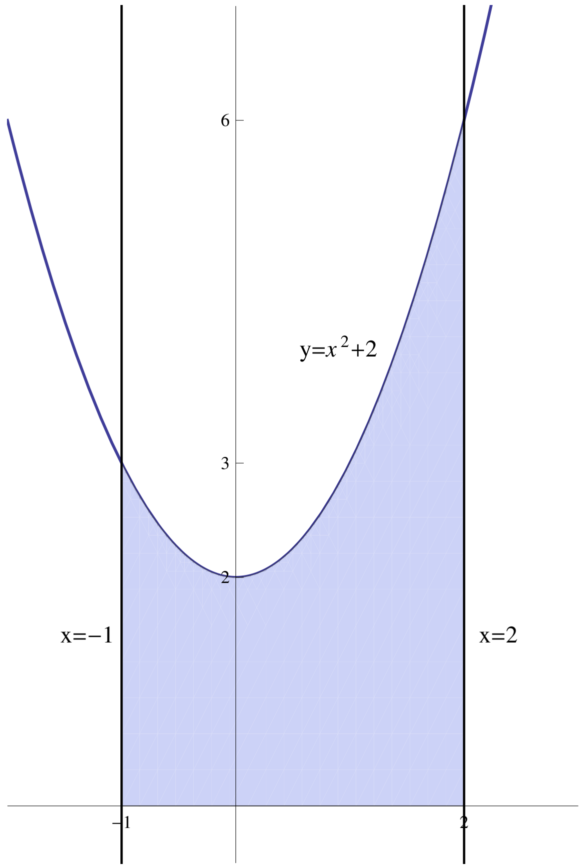
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1, 0)$

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x



$$A=\int_{-1}^{2}(x^2+2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$$

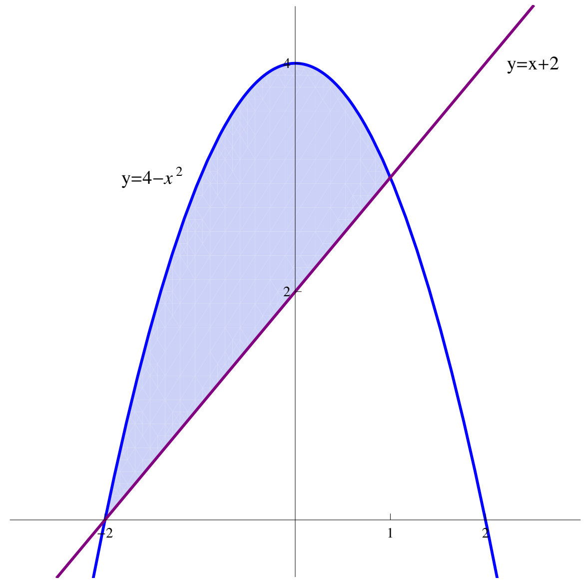
$$=\left[\left(\frac{2^3}{3}+2(2)\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+2(-1)\right)\right]=\left[\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{-1}{3}-2\right)\right]=\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}+2=9$$

(2) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=4-x^2$ و $y=x+2$

الحل :

المنحنى $y=4-x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y=x+2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0,2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\,,\ x = 1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x+2)\right]\ dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)\right]$$

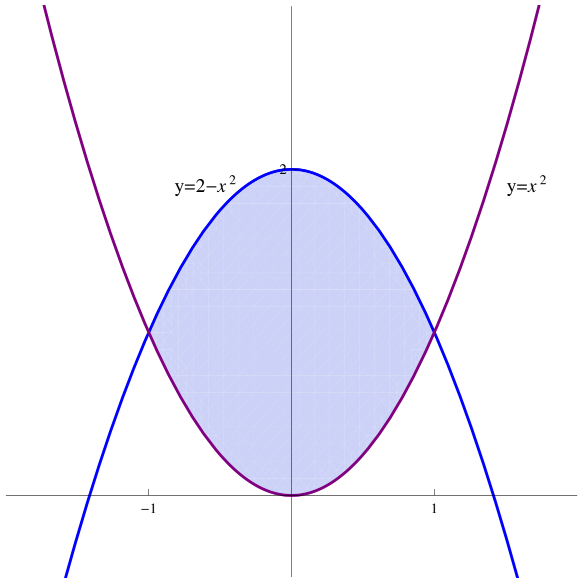
$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

(3) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$

الحل :

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,2)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0$$

$$\implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1 \ , \ x = 1$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left[(2 - x^2) - x^2\right] \, dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2) \, dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

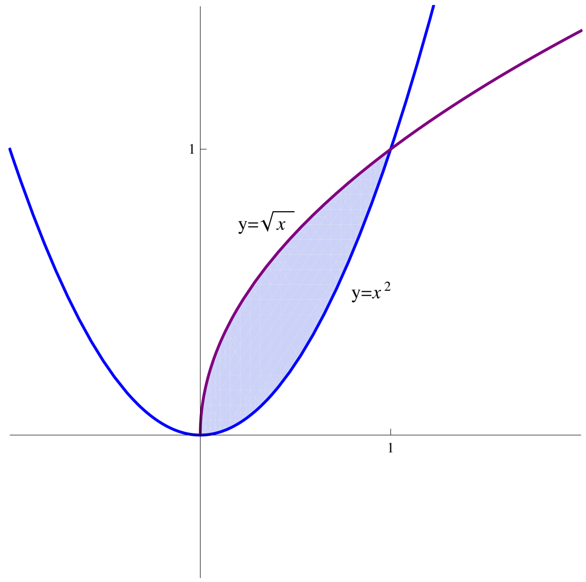
$$= \left[\left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right)\right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}$$

(4) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي من القطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه النقطة $(0, 0)$ وفتحته لليمين



نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\; x = 1$$

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]\, dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} - x^2\right]\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0)\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

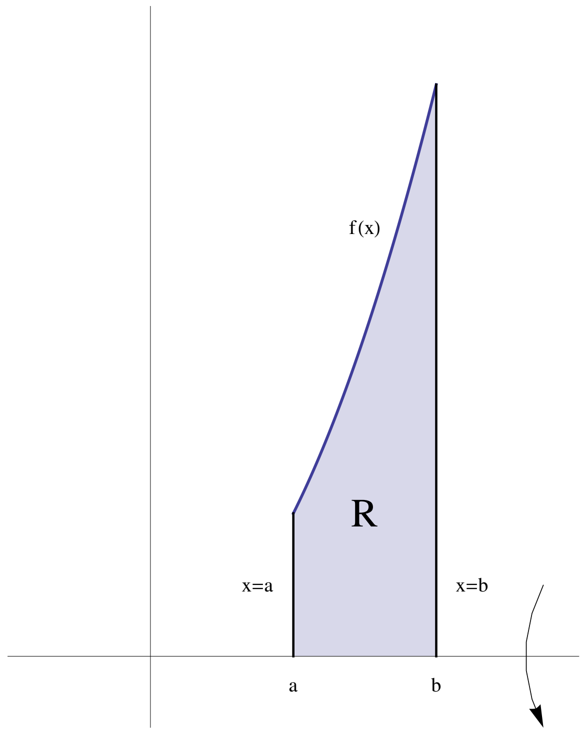
تمارين 1.7

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية :

1. $y = x^2 + 1 \,,\; y = 0 \,,\; x = -2 \,,\; x = 3$
2. $y = e^x \,,\; y = 0 \,,\; x = 0 \,,\; x = 5$
3. $y = \ln x \,,\; y = 0 \,,\; x = 4$
4. $y = 4 - x^2 \,,\; y = 0$
5. $y = x^2 + 1 \,,\; y = 2$
6. $y = 6 - x^2 \,,\; y = 2$
7. $y = x^2 + 3 \,,\; y = 1 \,,\; x = 0 \,,\; x = 4$
8. $y = 1 - x^2 \,,\; y = 4 \,,\; x = -1 \,,\; x = 1$
9. $y = x^2 + 2 \,,\; y = x + 2$
10. $y = x^2 + 1 \,,\; y = 1 - x$
11. $y = x^2 + 4 \,,\; y = 4 - x \,,\; x = 4$
12. $y = x^2 + 1 \,,\; y = 1 - x^2 \,,\; x = -1 \,,\; x = 3$
13. $y = x^2 - 3 \,,\; y = 5 - x^2$
14. $y = 2x^2 + 1 \,,\; y = x^2 + 5$
15. $y = x^2 \,,\; y = x^2 - 4x + 4 \,,\; y = 0$
16. $y = \sqrt{x-1} + 2 \,,\; y = 2 \,,\; y = 3 \,,\; x = 0$

2.7 حجوم أجسام الدوران

أولاً - الأقراص الأسطوانية :



إذا كانت الدالة f موجبة ومتصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت R المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور x والخطين المستقيمين $x=a$ و $x=b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

ملاحظة : نستخدم طريقة الأقراص الأسطوانية عندما تكون منطقة الدوران R تلامس بالكامل محور الدوران .

مثال :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2+1$ و $x=1$ و $x=2$ و $y=0$ حول محور x .

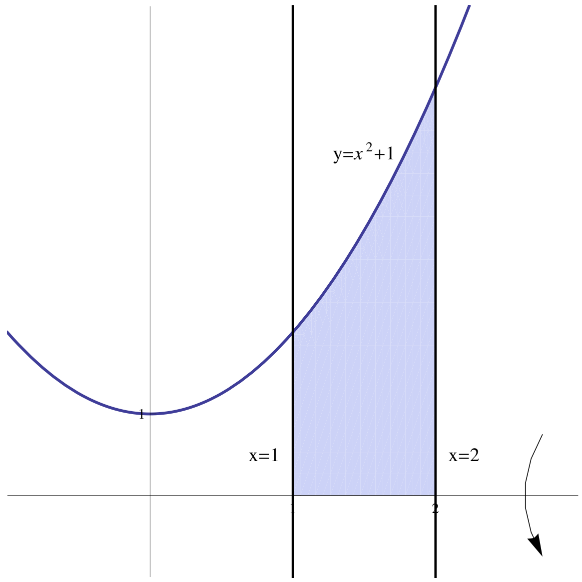
الحل :

المنحنى $y=x^2+1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $x=1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1,0)$.

المنحنى $x=2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2,0)$.

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V=\pi\int_1^2 \left(x^2+1\right)^2\ dx=\pi\int_1^2 \left(x^4+2x^2+1\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2=\pi\left[\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{32}{5}-\frac{1}{5}+\frac{16}{3}-\frac{2}{3}+1\right]=\pi\left(\frac{31}{5}+\frac{14}{3}+1\right)$$

$$=\left(\frac{93+70+15}{15}\right)\pi=\frac{178}{15}\pi$$

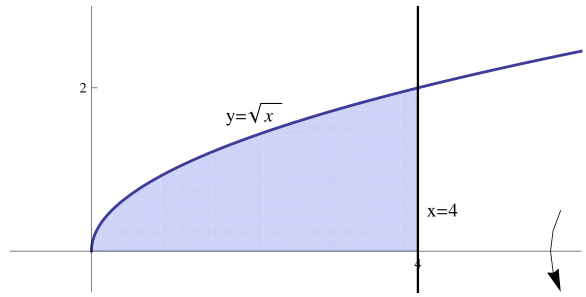
(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=\sqrt{x}$ و $x=4$ و $y=0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y=\sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x=y^2$ الذي رأسه $(0,0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x=4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4,0)$.

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

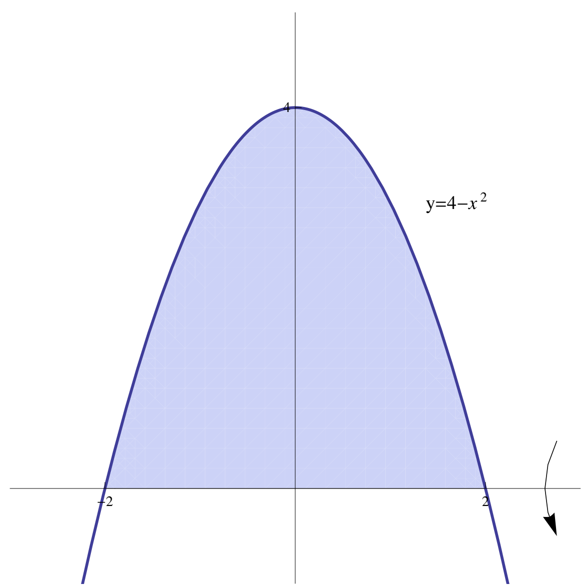
$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$
$$= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right) = 8\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = 4 - x^2$ مع $y = 0$:

$$4 - x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = -2 \, , \; x = 2$$

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}=\pi\left[\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)-\left(-32+\frac{64}{3}-\frac{32}{3}\right)\right]$$

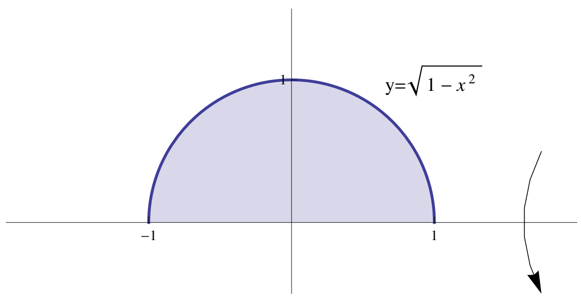
$$=\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}+32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=\pi\left(64-\frac{128}{3}+\frac{64}{5}\right)=\frac{512}{15}\pi$$

(4) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=\sqrt{1-x^2}$ و $y=0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y=\sqrt{1-x^2}$ يمثل النصف العلوي للدائرة $y^2+x^2=1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 .

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y=\sqrt{1-x^2}$ مع $y=0$:

$$\sqrt{1-x^2}=0\implies 1-x^2=0\implies x^2=1$$

$$\implies x=-1\,,\ x=1$$

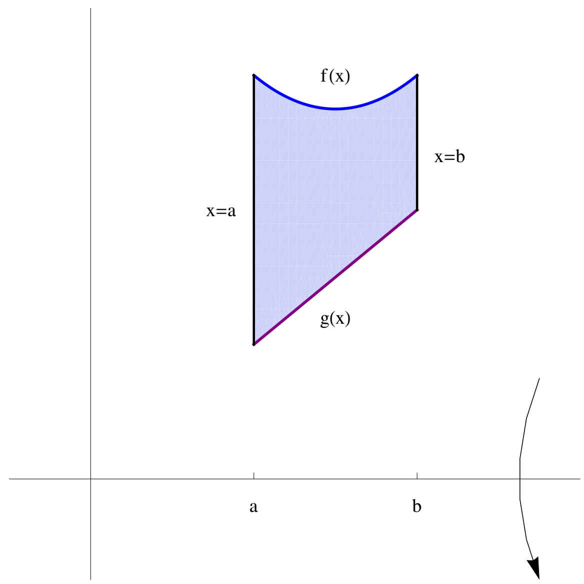
باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

ثانياً - طريقة الوردات



إذا كانت f و g دالتين موجبتين ومتصلتين على الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in [a,b]$ ، وكانت R هي المنطقة المحصورة بالمنحنيات $f(x)$ و $g(x)$ و المستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) \, dx$

ملاحظة : نستخدم طريقة الوردات حينما لا تكون منطقة الدوران ملامسة بالكامل لمحور الدوران .

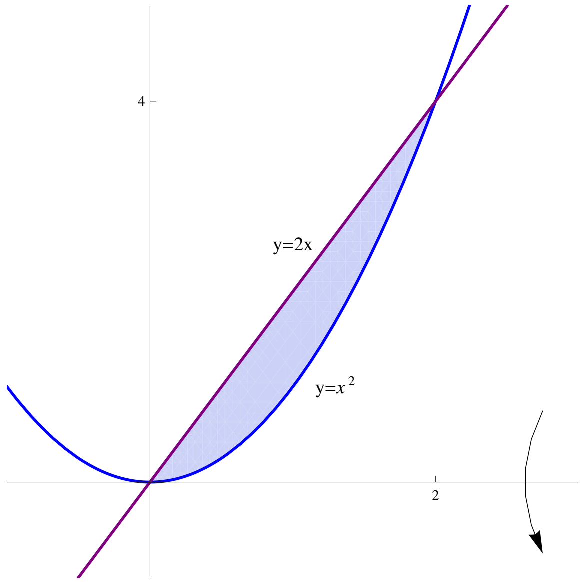
أمثلة :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0\,,\ x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right]\ dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right)\ dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5}\right)\right]$$

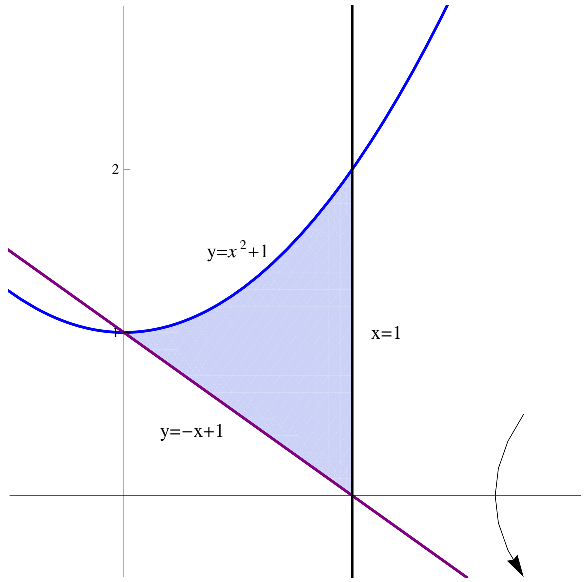
$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{64}{15}\pi$$

(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $y = -x + 1$ و $x = 1$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = -x + 1$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0,1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2 + 1$ مع المنحنى $y = -x + 1$:

$$x^2 + 1 = -x + 1 \implies x^2 + x = 0 \implies x(x+1) = 0$$

$$\implies x = -1 \,,\; x = 0$$

نقطة تقاطع المستقيمين $y = -x + 1$ و $x = 1$ هي النقطة $(1, 0)$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x^2+1)^2 - (-x+1)^2\right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1)\right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + x^2 + 2x\right) \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) - (0+0+0)\right] = \frac{23}{15}\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $y = 1$ و $x = 1$ و $x = 0$ حول محور x .

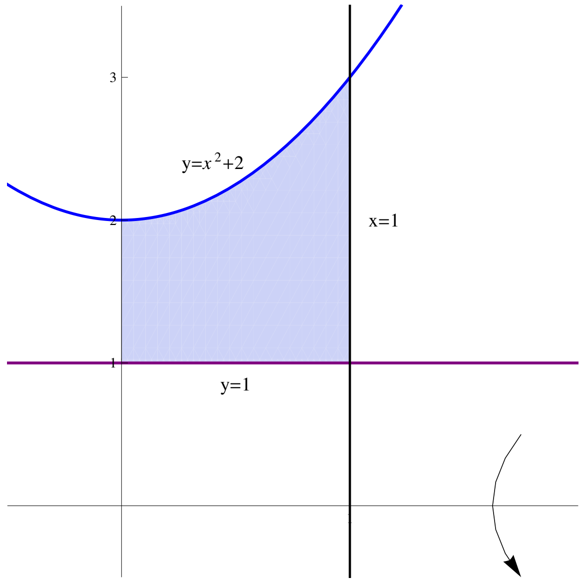
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, 1)$.

المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



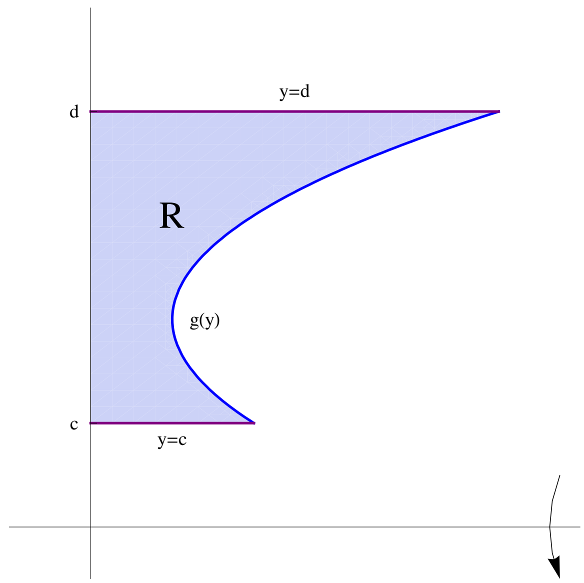
باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x^2+2)^2 - (1)^2\right]\, dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4 - 1)\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 3)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 3x\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 3\right) - (0+0+0)\right] = \frac{68}{15}\pi$$

ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :



إذا كانت الدالة $g(y)$ دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[c,d]$ و كانت R هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات $g(y)$ و $y=c$ و $y=d$ و محور y ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x تساوي $V=2\pi\int_c^d y\,g(y)\,dy$

أمثلة :

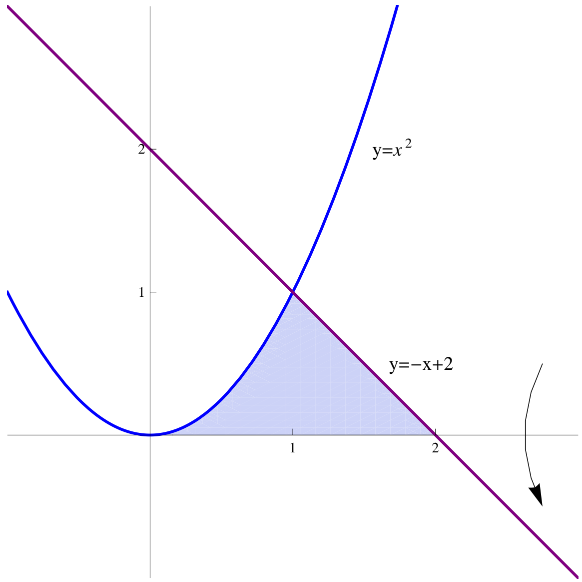
(1) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2$ و $y=-x+2$ و $y=0$ ، حول محور x .

الحل :

المنحنى $y=x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y=-x+2$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0,2)$.

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2$ مع $y = -x + 2$:

$$x^2 = -x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\,,\ x = 1 \implies y = 4\,,\ y = 1$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = -x + 2 \implies x = -y + 2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y\,[(-y+2) - \sqrt{y}]\ dy = 2\pi \int_0^1 y\left(-y - y^{\frac{1}{2}} + 2\right)\ dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(-y^2 - y^{\frac{3}{2}} + 2y\right)\ dy = 2\pi \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + y^2\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 1\right) - (0 - 0 + 0)\right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{-5 - 6 + 15}{15}\right) = 2\pi \left(\frac{4}{15}\right) = \frac{8\pi}{15}$$

(2) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x-1}$ و $y = 2$ و $y = 0$ و $x = 0$ ، حول محور x .

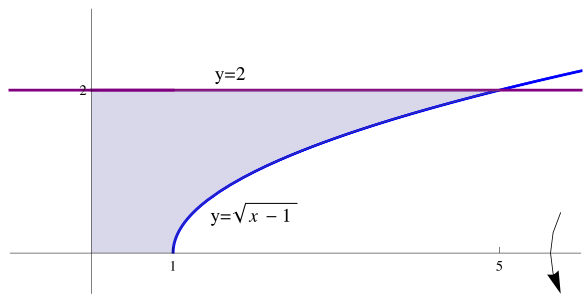
الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x-1}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2 + 1$ الذي رأسه $(1, 0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $y = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, 2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = \sqrt{x-1} \implies y^2 = x - 1 \implies x = y^2 + 1$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y\left(y^2 + 1\right) dy = 2\pi \int_0^2 \left(y^3 + y\right) dy = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right]_0^2$$

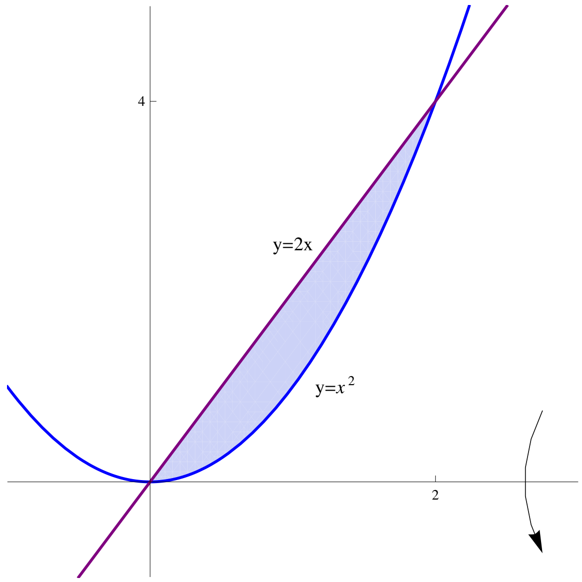
$$= 2\pi \left[\left(\frac{16}{4} + \frac{4}{2}\right) - (0 + 0)\right] = 2\pi\,(4 + 2) = 12\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0\,,\ x = 2 \implies y = 0\,,\ y = 4$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x \implies x = \frac{1}{2}y$$

$$V = 2\pi\int_0^4 y\left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y\right)\,dy = 2\pi\int_0^4\left(y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right)\,dy$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\pi\left[\left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(4)^3}{6}\right) - (0-0)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6}\right) = 128\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{128}{30}\pi = \frac{64}{15}\pi$$

تمارين 2.7

احسب حجم الجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية حول محور x :

1. $y = x^2 \;,\; y = 0 \;,\; x = 2$
2. $y = e^x \;,\; y = 0 \;,\; x = 0 \;,\; x = 2$
3. $y = \sqrt{x-1} \;,\; y = 0 \;,\; x = 5$
4. $y = \dfrac{r}{h}x \;,\; y = 0 \;,\; x = h$ ، حيث $r, h \in \mathbb{R}^+$ (حجم المخروط)
5. $y = -x^2 + 2x \;,\; y = 0$
6. $y = x^2 + 1 \;,\; y = 3x + 1$
7. $y = 4 - x^2 \;,\; y = 4 + x^2 \;,\; x = 2$
8. $y = 1 - x^2 \;,\; y = 3 \;,\; x = 0 \;,\; x = 1$
9. $y = x^2 \;,\; y = 2 - x^2$
10. $y = 4 - x^2 \;,\; y = x + 4 \;,\; x = 2$
11. $y = x^2 + 1 \;,\; y = 3x + 1$
12. $y = x^2 - 4x + 4 \;,\; y = x \;,\; y = 0$
13. $y = \sqrt{x} \;,\; y = 1 \;,\; y = 2 \;,\; x = 0$
14. $x = y^2 - 4y + 5 \;,\; y = 1 \;,\; y = 4 \;,\; x = 0$

3.7 طول القوس

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن طول منحنى الدالة f من $x = a$ إلى $x = b$ يساوي $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

أمثلة :

(1) أحسب طول القوس للدالة $y = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 3$.

الحل :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3}$$

(2) أحسب طول القوس للدالة $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 2$.

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 2}$$

$$= \sinh(\ln 2) - \sinh(0) = \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

(3) أحسب طول القوس $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ من $x = 1$ إلى $x = 2$.

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \implies f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

$$\mathrm{L} = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}\right)}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left|\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right|\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^2 = \left[\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 1\right)\right]$$

$$= 1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}$$

(4) أحسب طول القوس للدالة $y=\sqrt{4-x^2}$ من $x=-2$ إلى $x=2$.

الحل :

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \implies f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$L=\int_{-2}^2 \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx$$

$$= \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}\,dx = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx = 2\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= 2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2 = 2\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1)\right] = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi$$

تمارين 3.7

احسب طول القوس للدوال التالية على الفترات المعطاة :

1. $y = \pi + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ على الفترة $[0, 8]$
2. $y = \ln|\sec x|$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
3. $y = \frac{1}{3}\ (x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ على الفترة $[0, 1]$
4. $y = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$ على الفترة $[0, 1]$
5. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ على الفترة $[1, 3]$
6. $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x}$ على الفترة $[1, 4]$

4.7 مساحة سطح الدوران

إذا كانت الدالة f موجبة و قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران الدالة f من $x=a$ إلى $x=b$ حول محور x تساوي $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y=\frac{1}{3}x^3$ ، $0\le x\le 1$ حول محور x .

الحل :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3 \implies f'(x)=x^2$$

$$S=2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+(x^2)^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\frac{1}{4}\int_0^1 \left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}}(4x^3)\,dx=\frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{8}-1\right)$$

(2) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y=\sqrt{x}$ ، $1\le x\le 4$ حول محور x .

الحل :

$$f(x)=\sqrt{x} \implies f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$S=2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$=2\pi\,\frac{1}{2}\int_1^4\sqrt{4x+1}\,dx=\pi\int_1^4(4x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\pi\,\frac{1}{4}\int_1^4(4x+1)^{\frac{1}{2}}(4)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi}{6}\left[(17)^{\frac{3}{2}}-(5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

(3) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y=\sqrt{9-x^2}$ ، $-3\le x\le 3$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{\frac{(9-x^2)+x^2}{9-x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = 6\pi \int_{-3}^{3} 1\, dx$$

$$= 6\pi\, [x]_{-3}^{3} = 6\pi[3-(-3)] = 6\pi\,(6) = 36\pi$$