باب 6

صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة

1.6 صيغ عدم التعيين

أولاً - حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

مبرهنة (قاعدة لوبيتال) :

إذا كانت الدالتان $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابلتين للاشتقاق على فترة I تحوي c (باستثناء ربما عند c) وكانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I - \{c\}$

. وكان الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الصيغة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وكانت $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$ فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

أمثلة : أحسب النهايات التالية

$$(1) \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

الحل :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{3x^2}$$

الحل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{6x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

لاحظ أن $e^x \to \infty$ عندما $x \to \infty$

ثانياً - حالة عدم التعيين $0.\infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)e^{-x^2} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)e^{-x^2} \qquad (\infty.0)$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^{x^2}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\,e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

لاحظ أن $e^{x^2}\to\infty$ عندما $x\to\infty$

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ \ln x \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ \ln x \qquad (0.-\infty)$$

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ \ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} \qquad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{-2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{-2}=0$$

ثالثاً - حالة عدم التعيين $\infty-\infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \qquad (\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{(x-1)\,\frac{1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\left(\frac{x-1+x\ln x}{x}\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x-1+x\ln x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x-1+x\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{1+1+\ln x} = \frac{-1}{1+1+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + xe^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(x+1)e^x - 1}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{(x+1)e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x + (x+1)e^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x\ (1 + (x+1))}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

رابعاً - حالات عدم التعيين 1^∞ , ∞^0 , 0^0
باستخدام الدالة اللوغاريتمية تحول جميع هذه الحالات إلى صيغة عدم التعيين $0.\infty$

مثال : أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to0^+} x^x \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x\to0^+} x^x \qquad (0^0)$$

ضع $y = x^x$

$$\ln|y| = \ln|x^x| = x\ln|x|$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln|y| = \lim_{x\to0^+} x\ln|x| \qquad (0.-\infty)$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln|x| = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln|x|}{x^{-1}} \qquad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln|x|}{x^{-1}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} x^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (\infty^0)$$

ضع $y = \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln|y| = \ln\left|\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right| = \frac{1}{x}\,\ln\left|1+e^{2x}\right| = \frac{\ln\left|1+e^{2x}\right|}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln|y| = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left|1+e^{2x}\right|}{x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left|1+e^{2x}\right|}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \qquad (1^\infty)$$

ضع $y=\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

$$\ln|y|=\ln\left|\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right|=x\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y|=\lim_{x\to\infty}x\ln\left|1+\frac{3}{x}\right| \qquad (\infty.0)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}=\frac{3}{1+0}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=e^3$$

تمارين 1.6

احسب النهايات التالية :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x^2+\sin x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\ln x}{e^{2x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2+e^{2x}}{2+x+e^{3x}}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\,e^{\frac{1}{x}}-x\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\,5^{-x}$ (10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(2x)^{\frac{1}{\ln x}}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{3}{x}}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\cot x}$ (16) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}x^{\frac{1}{x-1}}$

2.6 التكاملات المعتلة

أولاً - حالة الفترة غير المحدودة :

(1) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,\infty)$. نعرف التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $(-\infty,b]$. نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

(1) $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

الحل :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_2^t (x-1)^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{t-1} - \frac{-1}{2-1}\right] = (0+1) = 1$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)}\, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{1}{x-1}\, dx = \lim_{t\to\infty} [\ln|x-1|]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln|t-1| - \ln(1)] = \lim_{t\to\infty} \ln|t-1| = \infty$$

التكامل المعتل متباعد

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2} \int_{t}^{0} e^{2x}\,(2)\, dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{e^0}{2} - \frac{e^{2t}}{2}\right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

التكامل المعتل متقارب

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{0} \frac{1}{x^2+9}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{0} \frac{1}{x^2+3^2}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+3^2}\, dx$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_s^0 + \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^t$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)\right]$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right)\right]$$

$$= \left[0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ثانياً - حالة الدالة غير المحدودة

(1) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b)$ وكانت $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $(a,b]$ وكانت $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ ماعدا عند $c\in(a,b)$ وكانت $\lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

(1) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \infty$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(-\int_0^t (2-x)^{-\frac{1}{2}}\,(-1)\,dx\right) = \lim_{t\to 2^-}\left(-\left[\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^t\right)$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(-2\left[(2-t)^{\frac{1}{2}} - (2-0)^{\frac{1}{2}}\right]\right) = -2[0-\sqrt{2}] = 2\sqrt{2}$$

التكامل المعتل متقارب

(2) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x-3}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\displaystyle\lim_{t\to 3^+}\frac{1}{x-3} = \infty$

$$\int_3^4 \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{t\to 3^+}\int_t^4 \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{t\to 3^+}[\ln|x-3|]_t^4$$

$$= \lim_{t\to 3^+}[\ln(1) - \ln|t-3|] = \lim_{t\to 3^+}[0-\ln|t-3|] = -(-\infty) = \infty$$

التكامل المعتل متباعد

(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \infty$ و $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \lim_{s\to 1^+}\int_s^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx + \lim_{s\to 1^+}\int_s^3 (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_s^3$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(0-1)^{\frac{2}{3}}\right] + \lim_{s\to 1^+}\left[\frac{3}{2}(3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{2}\,(0) - \frac{3}{2}\,(1)\right] + \left[\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}\,(0)\right] = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}$$

التكامل المعتل متقارب

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \infty$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \lim_{s\to\infty} \int_1^{s} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(2\int_t^{1} \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\,dx \right) + \lim_{s\to\infty} \left(2\int_1^{s} \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\,dx \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]_t^1 \right) + \lim_{s\to\infty} \left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]_1^s \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{1}) - \tan^{-1}(\sqrt{t})\right] \right)$$

$$+ \lim_{s\to\infty} \left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{s}) - \tan^{-1}(\sqrt{1})\right] \right)$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] + 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

التكامل المعتل متقارب