باب 5

طرائق التكامل

1.5 التكامل بالتجزئ

مبرهنة : إذا كانت $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و كانت كل من f' و g' متصلة فإن :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int x \cos x\,dx$

الحل :

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array}$$

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + c = x \sin x + \cos x + c$$

(2) $\int x^2\,e^x\,dx$

الحل :

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x\,e^x\,dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^x\,dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2e^x - 2\left[x\,e^x - \int e^x\,dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2x\,e^x + 2\int e^x\,dx = x^2e^x - 2x\,e^x + e^x = (x^2-2x+2)e^x + c$$

(3) $\displaystyle\int x^2\ \ln|x|\,dx$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln|x| & v &= x^2\,dx \\ du &= \frac{1}{x}\,dx & v &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$\int x^2\ \ln|x|\,dx = \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + c$$

(4) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \ln(1+x^2) & dv &= dx \\ du &= \frac{2x}{1+x^2}\,dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2}\,dx + \int \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int 2\,dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x + c$$

(5) $\displaystyle\int \tan^{-1}x\,dx$

الحل :

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1}x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} & v &= x \end{aligned}$$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2}\, x\, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

(6) $\int \sin^{-1} x\, dx$

الحل :

$$u = \sin^{-1} x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad v = x$$

$$\int \sin^{-1} x\, dx = x \sin^{-1} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

(7) $\int e^x \cos x\, dx$

الحل :

$$u = \cos x \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = -\sin x\, dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int -\sin x\, e^x\, dx = e^x \cos x + \int \sin x\, e^x\, dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$u = \sin x \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = \cos x\, dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int \sin x\, e^x\, dx$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$2 \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \left[e^x \cos x + e^x \sin x\right] + c$$

تمارين 1.5

احسب التكاملات التالية :

(1) $\int (2x+1)\ \cosh x\, dx$ (2) $\int (x^2-1)\ \sin 2x\, dx$

(3) $\int x^3\ e^x\, dx$ (4) $\int (x+1)\ \sec^2 x\, dx$

(5) $\int \ln|x|\, dx$ (6) $\int x^5\ \ln|x|\, dx$

(7) $\int x^{-4}\ \ln|x|\, dx$ (8) $\int \sec^{-1} x\, dx$

(9) $\int \sinh^{-1} x\, dx$ (10) $\int x\, csch^{-1} x\, dx$

(11) $\int e^{2x}\ \sin 3x\, dx$ (12) $\int e^{5x}\ \cos 2x\, dx$

(13) $\int e^{3x}\ \sinh x\, dx$ (14) $\int e^x\ \cosh 5x\, dx$

(15) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ (16) $\int (\ln|x|)^2\ dx$

(17) $\int x^3\ \sqrt{x^2-1}\, dx$ (18) $\int x^7\ \sqrt{x^4+2}\, dx$

2.5 تكامل قوى الدوال المثلثية

أولاً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x\, dx$ و $\int \cos^n x\, dx$

(1) إذا كان n عدداً فردياً فيمكن حل التكامل بالتعويض

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل $\int \sin^n x\, dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل $\int \cos^n x\, dx$

(2) إذا كان n عدداً زوجياً

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \sin^n x\, dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \cos^n x\, dx$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \cos^3 x\, dx$

الحل :

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\; \cos x\, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\; \cos x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x\, dx$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\; \cos x\, dx = \int \left(1 - u^2\right) du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

(2) $\int \sin^5 x\, dx$

الحل :

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x\; \sin x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2\; \sin x\, dx$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2\; \sin x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x\, dx \implies -du = \sin x\, dx$$

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\, dx = -\int \left(1-u^2\right)^2 du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right) du = -\left(u - 2\,\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c$$

$$= -\cos x + 2\,\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

(3) $\int \cos^4 2x\, dx$

الحل : باستخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^4 2x\, dx = \int \left(\cos^2 2x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x\right] dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}\left(1+\cos 8x\right)\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 8x\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right] dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 8x\, dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\, dx + \frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\int \cos 8x\,(8)\, dx$$

$$= \frac{3}{8}\,x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + c$$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x\, \cos^m x\, dx$

(1) إذا كان n فردياً نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل

(2) إذا كان m فردياً نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل

(3) إذا كان كل من n و m زوجياً

نستخدم $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ لحل التكامل

مثال : أحسب التكاملات التالية :

$$(1)\quad \int \sin^5 x\ \cos^2 x\ dx$$

الحل :

$$\int \sin^5 x\ \cos^2 x\ dx = \int \sin^4 x\ \cos^2 x\ \sin x\ dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2\ \cos^2 x\ \sin x\ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^2 x\ \sin x\ dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x\ dx \implies -du = \sin x\ dx$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^2 x\ \sin x\ dx = -\int \left(1-u^2\right)^2\ u^2\ du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\ u^2\ du = -\int \left(u^2-2u^4+u^6\right)\ du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\,\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

$$(2)\quad \int \sqrt{\sin x}\ \cos^3 x\ dx$$

الحل :

$$\int \sqrt{\sin x}\ \cos^3 x\ dx = \int \sqrt{\sin x}\ \cos^2 x\ \cos x\ dx$$

$$= \int \sqrt{\sin x}\left(1-\sin^2 x\right)\ \cos x\ dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x\ dx$$

$$\int \sqrt{\sin x}\left(1-\sin^2 x\right)\ \cos x\ dx = \int \sqrt{u}\left(1-u^2\right) du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}\left(1-u^2\right) du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}\right)\ du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{3}\left(\sin x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}\left(\sin x\right)^{\frac{7}{2}} + c$$

$$\int \sin^5 x \ \cos^7 x \, dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \sin^5 x \ \cos^7 x \, dx = \int \sin^4 x \ \cos^7 x \ \sin x \, dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \ \cos^7 x \ \sin x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \ \cos^7 x \ \sin x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \implies -du = \sin x \, dx$$

$$\int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \ \cos^7 x \ \sin x \, dx = -\int \left(1 - u^2\right)^2 \ u^7 \, du$$

$$= -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) \ u^7 \, du = -\int \left(u^7 - 2u^9 + u^{11}\right) \, du$$

$$= -\left(\frac{u^8}{8} - 2\,\frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12}\right) + c = -\frac{\cos^8 x}{8} + 2\,\frac{\cos^{10} x}{10} - \frac{\cos^{12} x}{12} + c$$

$$\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \left(\cos^2 x\right)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \ \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos^2 2x\right) \left(1 + \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \left(1 + \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \, dx + \frac{1}{8}\,\frac{1}{2} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \,(2)\, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int 1 \, dx - \frac{1}{16}\,\frac{1}{4} \int \cos 4x \,(4)\, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \,(2)\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\, x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16}\, \frac{\sin^3 2x}{3} + c$$

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx = \int \sec^n x\ dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx = \int \tan^m x\ dx = \int \tan^{m-2} x\ (\sec^2 x - 1)\ dx$$

$$= \int \tan^{m-2} x\ \sec^2 x\ dx - \int \tan^{m-2} x\ dx$$

$$= \frac{1}{m-1}\ \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x\ dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \tan x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \sec x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\sec x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \sec^3 x\ dx$

الحل : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\int \sec^3 x\ dx = \int \sec x\ \sec^2 x\ dx$$

$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x\ dx \\ du &= \sec x\ \tan x\ dx & v &= \tan x \end{aligned}$$

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \tan^2 x\ \sec x\ dx$$

$$= \sec x\ \tan x - \int \left(\sec^2 x - 1\right)\ \sec x\ dx$$

$$= \sec x \; \tan x - \int \left(\sec^3 x - \sec x\right) \; dx$$

$$= \sec x \; \tan x - \int \sec^3 x \; dx + \int \sec x \; dx$$

$$2 \int \sec^3 x \; dx = \sec x \; \tan x + \int \sec x \; dx$$

$$\int \sec^3 x \; dx = \frac{1}{2} \left(\sec x \; \tan x + \ln \left|\sec x + \tan x\right|\right) + c$$

(2) $\int \tan^4 x \; dx$

الحل :

$$\int \tan^4 x \; dx = \int \tan^2 x \; \tan^2 x \; dx = \int \tan^2 x \; \left(\sec^2 x - 1\right) \; dx$$

$$= \int \tan^2 x \; \sec^2 x \; dx - \int \tan^2 x \; dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x \; dx - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \; dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x \; dx - \int \sec^2 x \; dx + \int 1 \; dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

(3) $\int \tan^2 x \; \sec^6 x \; dx$

الحل :

$$\int \tan^2 x \; \sec^6 x \; dx = \int \tan^2 x \; \sec^4 x \; \sec^2 x \; dx$$

$$= \int \tan^2 x \; \left(\sec^2 x\right)^2 \; \sec^2 x \; dx = \int \tan^2 x \; \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \; \sec^2 x \; dx$$

باستخدام التعويض $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x \; dx$$

$$\int \tan^2 x \; \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \; \sec^2 x \; dx = \int u^2 \left(1 + u^2\right)^2 \; du$$

$$= \int u^2 \left(1 + 2u^2 + u^4\right) \; du = \int \left(u^2 + 2u^4 + u^6\right) \; du$$

$$= \frac{u^3}{3} + 2 \, \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + 2 \, \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c$$

(4) $\int \tan^5 x \, \sec^3 x \, dx$

الحل :

$$\int \tan^5 x \, \sec^3 x \, dx = \int \tan^4 x \, \sec^2 x \, \sec x \, \tan x \, dx$$

$$= \int \left(\tan^2 x\right)^2 \, \sec^2 x \, \sec x \, \tan x \, dx$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \, \sec^2 x \, \sec x \, \tan x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x \, \tan x \, dx$$

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \, \sec^2 x \, \sec x \, \tan x \, dx = \int (u^2 - 1)^2 \, u^2 \, du$$

$$= \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) \, u^2 \, du = \int \left(u^6 - 2u^4 + u^2\right) \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^7 x}{7} - 2\,\frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

رابعاً - التكاملات من النوع $\int \cot^m x \, \csc^n x \, dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \cot^m x \, \csc^n x \, dx = \int \csc^n x \, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \cot^m x \, \csc^n x \, dx = \int \cot^m x \, dx = \int \cot^{m-2} x \, (\csc^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \cot^{m-2} x \, \csc^2 x \, dx - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

$$= -\frac{1}{m-1} \, \cot^{m-1} x - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cot x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \csc x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\csc x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملين التاليين

(1) $\int \cot^4 x \ \csc^4 x \, dx$

الحل :

$$\int \cot^4 x \ \csc^4 x \, dx = \int \cot^4 x \ \csc^2 x \ \csc^2 x \, dx$$

$$= \int \cot^4 x \ \left(1 + \cot^2 x\right) \ \csc^2 x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cot x$

$$du = -csc^2 x \, dx \implies -du = \csc^2 x \, dx$$

$$\int \cot^4 x \ \left(1 + \cot^2 x\right) \ \csc^2 x \, dx = -\int u^4 \left(1 + u^2\right) du$$

$$= -\int \left(u^4 + u^6\right) du = -\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c = -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^7 x}{7} + c$$

(2) $\int \cot^5 x \ \csc^5 x \, dx$

الحل :

$$\int \cot^5 x \ \csc^5 x \, dx = \int \cot^4 x \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

$$= \int \left(\cot^2 x\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

$$= \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \csc x$

$$du = -\csc x \ \cot x \, dx \implies -du = \csc x \ \cot x \, dx$$

$$\int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx = -\int \left(u^2 - 1\right)^2 u^4 \, du$$

$$= -\int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^4 \, du = -\int \left(u^8 - 2u^6 + u^4\right) du$$

$$= -\left(\frac{u^9}{9} - 2\,\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5}\right) + c = -\frac{\csc^9 x}{9} + 2\,\frac{\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + c$$

خامساً - التكاملات $\int \cos mx\ \cos nx\ dx$, $\int \sin mx\ \sin nx\ dx$, $\int \sin mx\ \cos nx\ dx$
تحل هذه التكاملات باستخدام المتطابقات التالية :

$$\sin mx\ \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x]\right)$$

$$\sin mx\ \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\right)$$

$$\cos mx\ \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x]\right)$$

مثال : أحسب التكاملين التاليين

(1) $\int \sin 7x\ \cos 5x\ dx$

الحل :

$$\int \sin 7x\ \cos 5x\ dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin[(7-5)x] + \sin[(7+5)x]\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x\ dx + \frac{1}{2}\int \sin 12x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\int \sin 2x\ (2)\ dx + \frac{1}{2}\ \frac{1}{12}\int \sin 12x\ (12)\ dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + c$$

(2) $\int \sin 4x\ \sin 3x\ dx$

الحل :

$$\int \sin 4x\ \sin 3x\ dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos[(4-3)x] - \cos[(4+3)]x\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x\ dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x\ dx - \frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\int \cos 7x\ (7)\ dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + c$$

2.5 تمارين

احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \sin^3 x \ \cos^4 x \, dx$	(2) $\int \sin^2 x \ \cos^5 x \, dx$
(3) $\int \sin^5 x \ \cos^3 x \, dx$	(4) $\int \sqrt[3]{\cos x} \ \sin^3 x \, dx$
(5) $\int \sqrt{\tan x} \ \sec^4 x \, dx$	(6) $\int \tan^5 x \ \sec^5 x \, dx$
(7) $\int \tan^3 x \ \sec^4 x \, dx$	(8) $\int \cot^2 x \ \csc^6 x \, dx$
(9) $\int \cot^5 x \ \csc^3 x \, dx$	(10) $\int \sin 3x \ \cos 5x \, dx$
(11) $\int \sin 2x \ \sin 6x \, dx$	(12) $\int \cos 4x \ \cos 7x \, dx$
(13) $\int \sin^2 x \, dx$	(14) $\int \cos^2 x \, dx$
(15) $\int \sec^5 x \, dx$	(16) $\int \tan^6 x \, dx$

3.5 التعويضات المثلثية

تستخدم التعويضات المثلثية لحل التكاملات التي تحتوي على الجذور $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ حيث $a>0$
تقوم التعويضات المثلثية بتحويل هذه التكاملات إلى تكاملات لقوى دوال مثلثية
وبشكل تفصيلي :

(1) نستخدم التعويض $x=a\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ للتخلص من $\sqrt{a^2-x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

(2) نستخدم التعويض $x=a\tan\theta$ حيث $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{a^2+x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=a\sec\theta$$

(3) نستخدم التعويض $x=a\sec\theta$ حيث $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{x^2-a^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{a^2\tan^2\theta}=a\tan\theta$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

الحل :

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{x^2\sqrt{4^2-x^2}}\,dx$$

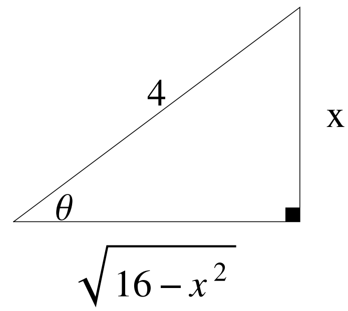
نستخدم التعويض $\sin\theta=\frac{x}{4}\implies x=4\sin\theta$

$$dx=4\cos\theta\,d\theta$$

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx=\int\frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$=\int\frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16\cos^2\theta}}\,d\theta=\int\frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\,4\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\int\frac{1}{16\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{16}\int\csc^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{16}\cot\theta+c$$



$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = -\frac{1}{16}\,\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + c$$

(2) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}}\,dx$$

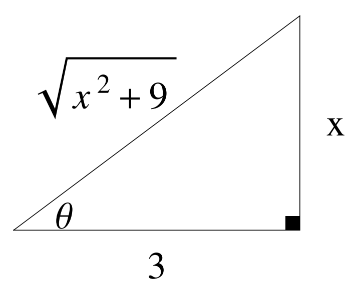
نستخدم التعويض $x = 3\tan\theta \implies \tan\theta = \dfrac{x}{3}$

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\left(\tan^2\theta+1\right)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right| + c$$

(3) $$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{\left(x^2\right)^2}\,dx$$

نستخدم التعويض $\sec\theta = \frac{x}{5} \implies x = 5\sec\theta$

$$dx = 5\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{\left(x^2\right)^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{25\sec^2\theta-25}}{\left(5^2\sec^2\theta\right)^2}\,5\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$

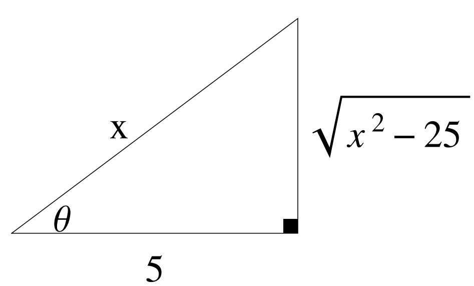
$$= \int \frac{\sqrt{25\left(\sec^2\theta-1\right)}}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{25\ \tan^2\theta}}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$

$$= \int \frac{5\ \tan\theta}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta = \int \frac{5^2\sec\theta\ \tan^2\theta}{5^4\sec^4\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{5^2\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \tan^2\theta\ \frac{1}{\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{\sin^2\theta\ \cos^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int (\sin\theta)^2\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{25}\,\frac{(\sin\theta)^3}{3} + c = \frac{1}{75}\,(\sin\theta)^3 + c$$



$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx = \frac{1}{75}\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\right)^3 + c$$

$$\int \frac{1}{(x^2+8x+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{(x^2+8x+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{((x^2+8x+16)+9)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{((x+4)^2+3^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

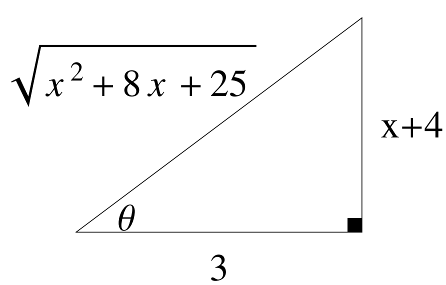
نستخدم التعويض $\tan\theta = \dfrac{x+4}{3} \implies x+4 = 3\tan\theta$

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{1}{((x+4)^2+3^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{\left(9\tan^2\theta+9\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{\left(9(\tan^2\theta+1)\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{(3^2\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3^3\ \sec^3\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{9}\sin\theta + c$$



$$\int \frac{1}{(x^2+8x+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+25}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx$$

نستخدم التعويض $x = 2\sin\theta \implies \sin\theta = \frac{x}{2}$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\, d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\, d\theta = \int 1\, d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

لاحظ أن $\sin\theta = \frac{x}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

3.5 تمارين

احسب التكاملات التالية :

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \sqrt{36-x^2}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{32-x^2-4x}\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4x+13)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ (10) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$ (12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

4.5 الكسور الجزئية

تستخدم الكسور الجزئية لحساب تكاملات الدوال الكسرية ، والدالة الكسرية هي حاصل قسمة كثيرتي حدود .

العامل الخطي : هو كثيرة حدود من الدرجة الأولى ، أي أنه على الصورة $ax + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

مثال : $2x$ ، $x - 3$ ، $4x + 1$ جميعها عوامل خطية .

المقدار التربيعي غير القابل للاختزال : هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية ليس لها حلول حقيقية ، أي أنه على الشكل $ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac < 0$.

مثال : $x^2 + 1$ ، $x^2 + 9$ ، $x^2 + x + 1$ جميعها مقادير تربيعية غير قابلة للاختزال .
أما المقدار التربيعي $x^2 - 4$ فهو قابل للاختزال
لأن $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

مبرهنة : إذا كانت $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية ودرجة $g(x)$ أصغر من درجة $h(x)$ ، فإن هناك كسوراً $F_1, F_2, \cdots, F_n$ تحقق $f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$ وتكون كل $F_i(x)$ إما على الصورة $\dfrac{A}{(ax + b)^m}$ (حيث $m \in \mathbb{N}$) أو على الصورة $\dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^m}$ حيث $b^2 - 4ac < 0$

مساهمة العامل الخطي $(ax + b)^m$ تأخذ الصورة :
$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax + b)^m}$$
حيث $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مساهمة المقدار التربيعي غير القابل للاختزال $(ax^2 + bx + c)^m$ تأخذ الصورة :
$$\frac{A_1 + B_1x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2x}{(ax^2 + bx + c)^2} \cdots + \frac{A_m + B_mx}{(ax^2 + bx + c)^m}$$
حيث $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مثال : أكتب الدوال الكسرية التالية على هيئة كسور جزئية

(1) $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3}$

الحل :

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x - 3}$$

(2) $\dfrac{x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

الحل :

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{x+4}{x(x+2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} \quad (3)$$

الحل :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x-2}{x^4+4x^2} \quad (4)$$

الحل :

$$\frac{x-2}{x^4+4x^2} = \frac{x-2}{x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x^2+9)} \quad (5)$$

الحل :

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x^2+9)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+9} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+1} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} \quad (6)$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} = x + \frac{-x^2+2}{x(x^2+1)} = x + \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A_1(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{A_2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$x-7=A_1(x+3)+A_2(x-2)$$

ضع $x=2$

$$2-7=A_1(2+3)\implies -5=5A_1\implies A_1=-1$$

ضع $x=-3$

$$-3-7=A_2(-3-2)\implies -10=-5A_2\implies A_2=2$$

$$\frac{x-7}{(x-2)(x+3)}=\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+3}$$

$$\int\frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+3}\right)\,dx$$

$$=\int\frac{-1}{x-2}\,dx+\int\frac{2}{x+3}\,dx=-\int\frac{1}{x-2}\,dx+2\int\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=-\ln|x-2|+2\ln|x+3|+c$$

(2) $\displaystyle\int\frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x}=\frac{7x^2+11x+5}{x(x^2+2x+1)}=\frac{7x^2+11x+5}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x}=\frac{A_1(x+1)^2}{x(x+1)^2}+\frac{A_2\,x(x+1)}{(x+1)x(x+1)}+\frac{A_3\,x}{x(x+1)^2}$$

$$7x^2+11x+5=A_1(x+1)^2+A_2\,x(x+1)+A_3\,x$$

$$7x^2+11x+5=A_1(x^2+2x+1)+A_2x^2+A_2x+A_3x$$

$$7x^2+11x+5=A_1x^2+2A_1x+A_1+A_2x^2+A_2x+A_3x$$

$$7x^2+11x+5=(A_1+A_2)\,x^2+(2A_1+A_2+A_3)\,x+A_1$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcc}
A_1+A_2=7 & \longrightarrow & (1)\\
2A_1+A_2+A_3=11 & \longrightarrow & (2)\\
A_1=5 & \longrightarrow & (3)
\end{array}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$A_2=7-A_1=7-5=2$$

من المعادلة (2) نستنتج أن

$$10 + 2 + A_3 = 11 \implies A_3 = 11 - 12 = -1$$

$$\frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{7x^2 + 11x + 5}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= 5\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int \frac{1}{x+1}\, dx - \int (x+1)^{-2}\, dx$$

$$= 5\ln|x| + 2\ln|x+1| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c$$

(3) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+x}\, dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x - 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x - 2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcc} A + B = 0 & \longrightarrow & (1) \\ C = 1 & \longrightarrow & (2) \\ A = -2 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$-2 + B = 0 \implies B = 2$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\, dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{-2}{x}\, dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx = -2\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$$

(4) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+4}$$

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{(B_1x+C_1)\,(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} + \frac{(B_2x+C_2)\,(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$3 = (B_1x+C_1)\,(x^2+4) + (B_2x+C_2)\,(x^2+1)$$

$$3 = B_1x^3 + 4B_1x + C_1x^2 + 4C_1 + B_2x^3 + B_2x + C_2x^2 + C_2$$

$$3 = (B_1+B_2)\,x^3 + (C_1+C_2)\,x^2 + (4B_1+B_2)\,x + (4C_1+C_2)$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcl} B_1+B_2=0 & \longrightarrow & (1) \\ C_1+C_2=0 & \longrightarrow & (2) \\ 4B_1+B_2=0 & \longrightarrow & (3) \\ 4C_1+C_2=3 & \longrightarrow & (4) \end{array}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) نحصل على :

$$3B_1 = 0 \implies B_1 = 0$$

من المعادلة (1) نستنتج أن : $B_2 = 0$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (4) نحصل على :

$$3C_1 = 3 \implies C_1 = 1$$

من المعادلة (2) نستنتج أن : $C_2 = -1$

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+4}$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\right)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

تمارين 4.5

احسب التكاملات التالية :

$$(1)\ \int \frac{8x+2}{x^2+2x-8}\,dx \qquad (2)\ \int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$$

$$(3)\ \int \frac{4x^2+2x+12}{x^3+4x}\,dx \qquad (4)\ \int \frac{5}{x^4+13x^2+36}\,dx$$

$$(5)\ \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx \qquad (6)\ \int \frac{-2x^3+5x^2-2x+3}{x^4+x^2}\,dx$$

$$(7)\ \int \frac{x^3-1}{x^2+x}\,dx \qquad (8)\ \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$$

$$(9)\ \int \frac{1}{(x+1)\,(x-1)^2}\,dx \qquad (10)\ \int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)\,(x-2)^2}\,dx$$

$$(11)\ \int \frac{\cos x}{\sin^2 x+5\sin x+6}\,dx \qquad (12)\ \int \frac{4\,e^x}{e^{2x}+2e^x-3}\,dx$$

5.5 تعويضات متفرقة

أولاً - التكاملات التي تحتوي على قوى كسرية

إذا كان التكامل يحتوي على قوى كسرية للمتغير x ، نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{n}}$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه القوى فنستبدل القوى الكسرية بقوى صحيحة .

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{6}} \implies x = u^6$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2}\, du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u+1)}\, du = \int \frac{6u^3}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^3}{u+1}\, du = \int \left(6u^2 - 6u + 6 - \frac{6}{u+1}\right)\, du$$

$$= 6\,\frac{u^3}{3} - 6\,\frac{u^2}{2} + 6u - 6\ln|u+1| + c = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|u+1| + c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}}\, dx$$

نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{6}} \implies x = u^6$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}\,dx=\int \frac{6u^5}{u^3+u}\,du$$

$$=\int \frac{6u^5}{u(u^2+1)}\,du=\int \frac{6u^4}{u^2+1}\,du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^4}{u^2+1}\,du=\int\left(6u^2-6+\frac{6}{u^2+1}\right)\,du$$

$$=6\,\frac{u^3}{3}-6u+6\tan^{-1}u+c=2u^3-6u+6\tan^{-1}u+c$$

$$=2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3-6x^{\frac{1}{6}}+6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)+c=2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)+c$$

ثانياً - التكاملات التي تحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$:

إذا كان التكامل يحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$ نستخدم التعويض $u=\sqrt[n]{g(x)}$ لحل التكامل .

مثال : أحسب التكاملين التاليين :

$$(1)\quad \int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u=\sqrt{1+\sqrt{x}}\implies 1+\sqrt{x}=u^2\implies \sqrt{x}=u^2-1\implies x=(u^2-1)^2$$

$$dx=2(u^2-1)(2u)\,du=(4u^3-4u)\,du$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=\int u(4u^3-4u)\,du=\int (4u^4-4u^2)\,du$$

$$=4\,\frac{u^5}{5}-4\,\frac{u^3}{3}+c=\frac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^5-\frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3+c$$

$$(2)\quad \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u=\sqrt{e^x+1}\implies e^x+1=u^2\implies e^x=u^2-1\implies x=\ln|u^2-1|$$

$$dx=\frac{2u}{u^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx=\int \frac{1}{u}\,\frac{2u}{u^2-1}\,du=\int \frac{2}{u^2-1}\,du$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{A_1}{u-1} + \frac{A_2}{u+1}$$

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{A_1(u+1)}{(u-1)(u+1)} + \frac{A_2(u-1)}{(u+1)(u-1)}$$

$$2 = A_1(u+1) + A_2(u-1)$$

ضع $u = 1$

$$2 = A_1(1+1) \implies 2A_1 = 2 \implies A_1 = 1$$

ضع $u = -1$

$$2 = A_2(-1-1) \implies -2A_2 = 2 \implies A_2 = -1$$

$$\int \frac{2}{u^2-1}\, du = \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u+1}\right) du$$

$$= \ln|u-1| - \ln|u+1| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \ln\left|\sqrt{e^x+1}-1\right| - \ln\left|\sqrt{e^x+1}+1\right| + c$$